

Mécanique des Milieux Continus en Grandes Transformations

Généralités

`guillaume.helbert@enib.fr`



Introduction

Milieu continu

- ▶ A l'œil nu, la matière semble continu (sans variation brutale de propriétés).
- ▶ Contradiction avec la physique microscopique (matériau majoritairement constitué de vide).
- ▶ Travail sur de "gros" points de mesure (moyenne statistique sur un petit temps et un petit espace).

Mécanique des Milieux Continus : rapprochement de la mécanique des fluides et de la mécanique des solides.

Grandes transformations

- ▶ Hypothèse des petites perturbations pas toujours valables (de petites déformations peuvent induire de grands déplacements).
- ▶ Les déformations peuvent être effectivement importantes (instabilités de structures, dynamique rapide, fluage, mise en forme).

Conventions d'écriture et rappels

Par défaut, toutes les quantités sont exprimées dans un repère cartésien.

Scalaire	a
Vecteur	\mathbf{a}
Tenseur d'ordre 2	\mathbf{A}
Tenseur d'ordre 4	\mathbb{A}
Produit scalaire	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$
Produit simplement contracté	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{kj}$
Produit doublement contracté	$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$
Norme d'un vecteur	$\ \mathbf{a}\ = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
Norme d'un tenseur d'ordre 2	$\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$
Symbole de Kronecker	\mathbf{I} ou $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$
Trace d'un tenseur d'ordre 2	$tr(\mathbf{A}) = A_{ii} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$
Gradient d'un tenseur	$d\mathbf{A} = \mathbf{grad}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{M}$
Divergence d'un tenseur	$\mathbf{div}(\mathbf{T}) = \mathbf{grad}(\mathbf{T}) : \mathbf{I}$
Produit vectoriel	$\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{H} : (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$

1 Cinématique des Milieux Continus

- Description du mouvement
- Tenseurs de déformation
- Objectivité des tenseurs

2 Mécanique des Milieux Continus

- Tenseurs de contrainte
- Lois de conservation
- Dérivées objectives de contrainte

3 Lois de Comportement

- Thermique
- Hyperélasticité
- Hypoélasticité

1 Cinématique des Milieux Continus

- Description du mouvement
- Tenseurs de déformation
- Objectivité des tenseurs

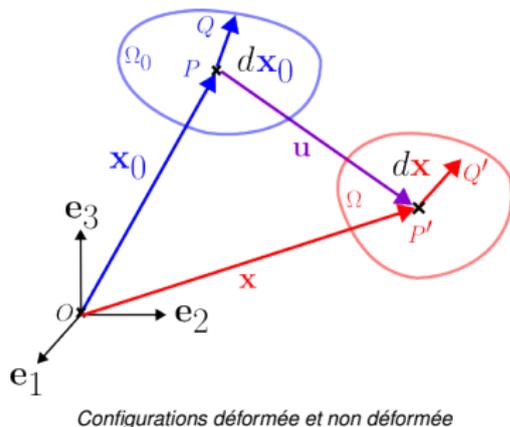
2 Mécanique des Milieux Continus

- Tenseurs de contrainte
- Lois de conservation
- Dérivées objectives de contrainte

3 Lois de Comportement

- Thermique
- Hyperélasticité
- Hypoélasticité

Mouvement (descriptions eulérienne/lagrangienne)



Soit (e_1, e_2, e_3) un système de coordonnées cartésien.

Configuration de référence (domaine non déformé Ω_0)

$$\mathbf{x}_0 = x_{0i} \mathbf{e}_i \quad x_{0i} : \text{coordonnée matérielles / lagrangiennes}$$

- Identifier les particules.
- Référence pour caractériser la transformation du système.

Configuration actuelle (domaine déformé Ω)

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad x_i : \text{coordonnée spatiales / eulériennes}$$

Transformation

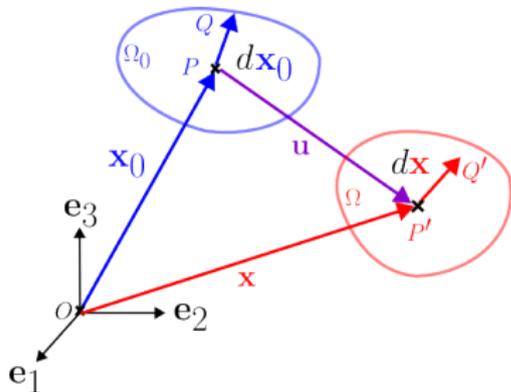
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad \text{Application continue, différentiable et inversible} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0)$$

Champ matériel : application qui à toute particule et à tout instant associe une grandeur physique.

$$\begin{array}{ccc} \text{Description eulérienne (spatiale)} & \Leftrightarrow & \text{Description lagrangienne (matérielle)} \\ \Psi(\mathbf{x}, t) & = & \Psi_0(\mathbf{x}_0, t) \\ \hookrightarrow \text{Déroulement de l'action} & & \hookrightarrow \text{Matière contrôle l'action} \end{array}$$

Cas des petites perturbations : $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 \Rightarrow$ on confond les deux descriptions.

Déplacement, vitesse, accélération



Configurations déformée et non déformée

Description lagrangienne :

Déplacement

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0)$$

Vitesse (dérivée matérielle)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{x}_0)}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{u}}$$

Accélération

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{u}}$$

Description eulérienne :

Dérivée particulaire \equiv dérivée temporelle quand on suit la particule dans son mouvement :

$$\frac{D\Psi(P, t)}{Dt} = \frac{\partial \Psi(P, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(P, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(P, t)}{\partial t} + \mathbf{grad}(\Psi) \cdot \mathbf{v} \quad \left(\text{lagrangien : } \frac{D\Psi(P, t)}{Dt} = \frac{\partial \Psi(P, t)}{\partial t} \right)$$

$$\Psi = \mathbf{v} \Rightarrow \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{grad}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \quad \begin{cases} d\Psi = \mathbf{grad}(\Psi) \cdot d\mathbf{x} \text{ (eulérien)} \\ d\Psi = \mathbf{grad}_0(\Psi) \cdot d\mathbf{x}_0 \text{ (lagrangien)} \end{cases}$$

Gradient de transformation

Matrice Jacobienne du mouvement :

Gradient de transformation

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{grad}_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{I} + \mathbf{grad}_0(\mathbf{u}) \\ d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Application linéaire inversible

Tenseur "mixte" ni eulérien, ni lagrangien

Si $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, alors $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_0$.

Passage d'une description à l'autre : $\mathbf{grad}_0(\Psi) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{grad}(\Psi) \cdot \mathbf{F}$

Dérivée temporelle de \mathbf{F} :

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{grad}_0(\mathbf{v})$$

Inverse de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}}$$

Déterminant du jacobien

$$J = \det(\mathbf{F}) \neq 0$$

Dérivée partielle du déterminant de \mathbf{F} : $\frac{D J}{D t} = J \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = J \operatorname{div}(\mathbf{v})$

Relation entre les intégrales sur les domaines de référence et actuel :

$$\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega_0} \Psi_0(\mathbf{x}_0, t) J dV_0$$

Gradient de transformation (exemple)

Élongation d'un cube selon ses directions principales :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 x_{01} \\ x_2 = \lambda_2 x_{02} \\ x_3 = \lambda_3 x_{03} \end{cases}$$

Gradient de transformation :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

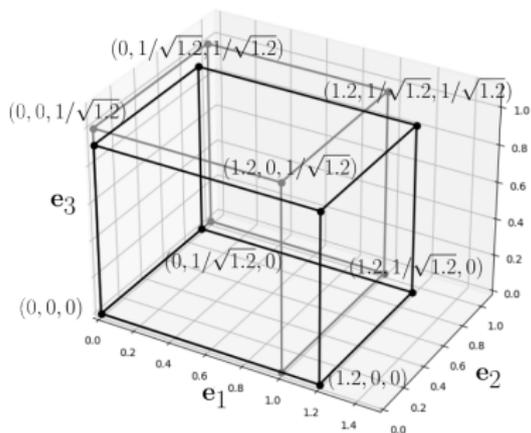
Déterminant de \mathbf{F} :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Variation de volume :

$$\begin{cases} dV_0 = dx_{01} dx_{02} dx_{03} \\ dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dx_{01} dx_{02} dx_{03} = J dV_0 \end{cases}$$

Elongation



Élongation d'un cube incompressible :

$$\lambda_1 = 1.2, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{1.2}}$$

Cas de l'incompressibilité :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Rotations

Mouvement de corps rigide

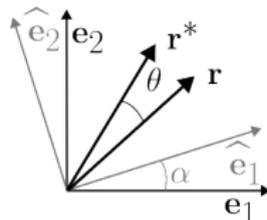
$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_T(t) \quad \mathbf{R} : \text{matrice orthogonale de rotation} \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t \quad \det(\mathbf{R}) = +1$$

Conservation de la longueur : $d\mathbf{x}^t \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_0^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0^t \cdot d\mathbf{x}_0$

Soit $\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i = \hat{r}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ et $\mathbf{r}^* = r_i^* \hat{\mathbf{e}}_i$,

Changement de repère :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{Bmatrix}$$



Rotation d'un vecteur/d'une matrice :

$$\begin{cases} \mathbf{r}^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{D}^* = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \end{cases} \quad \mathbf{R} = \cos(\theta)\mathbf{I} - (1 - \cos(\theta))\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} - \sin(\theta)\mathbf{H} \cdot \mathbf{w} \quad \text{Changement de repère et rotation}$$

Vitesse angulaire : $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_T(t)$ avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) \Rightarrow \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \mathbf{v}_T$

Tenseur de vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t$$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad 3D: \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

$\frac{D}{Dt}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^t = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}$ est un tenseur antisymétrique.

Mesures de déformation 1

Déformation décrite par un champ de tenseur $\Psi(P, t)$.

Description lagrangienne :

$$\begin{aligned} dx^t \cdot \delta x - dx_0^t \cdot \delta x_0 &= dx_0^t \cdot F^t \cdot F \cdot \delta x_0 - dx_0^t \cdot \delta x_0 \\ &= dx_0^t \cdot (C - I) \cdot \delta x_0 \end{aligned}$$

Description eulérienne :

$$\begin{aligned} dx^t \cdot \delta x - dx_0^t \cdot \delta x_0 &= dx_0^t \cdot \delta x_0 - dx^t \cdot F^{-t} \cdot F^{-1} \cdot \delta x \\ &= dx^t \cdot (I - B^{-1}) \cdot \delta x \end{aligned}$$

Tenseur Cauchy-Green droit

$$C = F^t \cdot F \quad \text{symétrique}$$

Tenseur Cauchy-Green gauche

$$B = F \cdot F^t \quad \text{symétrique}$$

Tenseur de Green-Lagrange

$$E = \frac{1}{2} (C - I) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u^t}{\partial x_0} + \frac{\partial u^t}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)$$

Tenseur d'Almansi-Euler

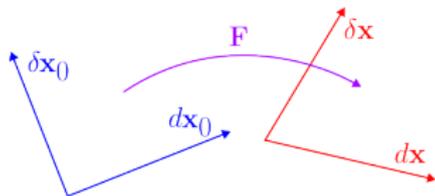
$$A = \frac{1}{2} (I - B^{-1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^t}{\partial x} + \frac{\partial u^t}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Petites déformations : $\frac{\partial u}{\partial x_0} \ll 1 \Rightarrow E \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u^t}{\partial x_0} \right) \approx \varepsilon$

Rotations de corps rigide : $F = R \Rightarrow E = \frac{1}{2} (R^t \cdot R - I) = 0$

Petites déformations : $x \equiv x_0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_0} \ll 1 \Rightarrow A \approx \varepsilon$

Rotations de corps rigide : $F = R \Rightarrow A = \frac{1}{2} (I - R^{-t} \cdot R^{-1}) = 0$



Transformation par F

$$\begin{aligned} dx_0^t \cdot E \cdot \delta x_0 &= dx^t \cdot A \cdot \delta x \\ &= dx_0^t \cdot F^t \cdot A \cdot F \cdot \delta x_0 \\ &\Rightarrow E = F^t \cdot A \cdot F \end{aligned}$$

Mesures de déformation 2

Mesure de vitesses de déformation d'usage en mécanique des fluides.

Tenseur gradient de vitesse (description eulérienne)

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \end{cases}$$

Tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t)$$

Lié à la dérivée temporelle log. des élongations principales.

Tenseur des taux de rotation

$$\mathbf{W} = \text{asym}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^t)$$

Ne permet de caractériser la rotation des particules à lui seul.

Vitesse de changement du carré de la longueur :

$$\frac{\partial}{\partial t} (dx^2) = \frac{\partial}{\partial t} (dx^t \cdot dx) = 2dx \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot dx = 2dx \cdot \mathbf{L} \cdot dx = dx \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t + \mathbf{L} - \mathbf{L}^t) \cdot dx = dx \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \cdot dx$$

Absence de déformation : $dx^2 = dx_0^2 \Rightarrow \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{W}$.

Relation avec le tenseur \mathbf{E} :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^t \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-t} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^t \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$$

Mesures de déformation (exemple)

 $0 \rightarrow 1 \quad (0 \leq t \leq 1) :$

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{x}_0, t) = x_{01} + atx_{02} \\ x_2(\mathbf{x}_0, t) = x_{02} \end{cases}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

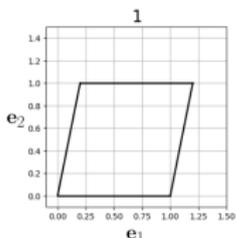
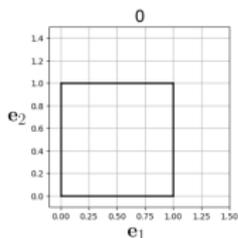
$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -at \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & at \\ at & a^2 t^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 2a^2 t \end{bmatrix}$$



Mesures de déformation (exemple)

$$2 \rightarrow 3 \quad 1 \leq \bar{i} \leq 2 \quad (\bar{i} = t - 1) :$$

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{x}_0, t) = x_{01} + ax_{02} \\ x_2(\mathbf{x}_0, t) = (1 + bt)x_{02} \end{cases}$$

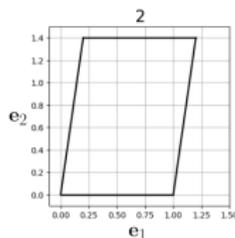
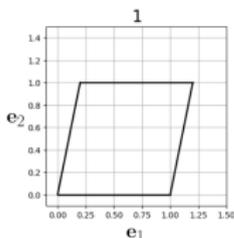
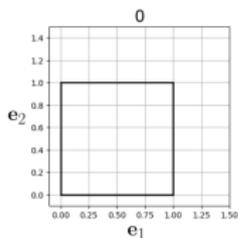
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 + bt \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1 + bt} \begin{bmatrix} 1 + bt & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1 + bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{1 + bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & a^2 + (bt)^2 + 2bt \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b(bt + 1) \end{bmatrix}$$



Mesures de déformation (exemple)

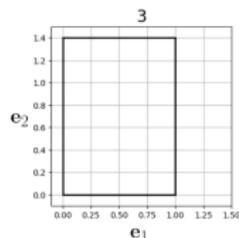
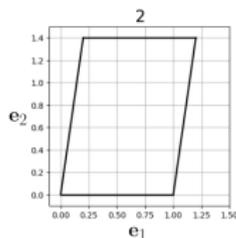
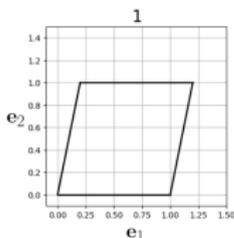
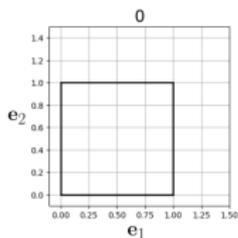
$$3 \rightarrow 4 \quad 2 \leq \bar{t} \leq 3 \quad (\bar{t} = t - 2):$$

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{x}_0, t) = x_{01} + a(1-t)x_{02} \\ x_2(\mathbf{x}_0, t) = (1+b)x_{02} \end{cases}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & a(1-t) \\ 0 & 1+b \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1+b} \begin{bmatrix} 1+b & a(t-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1+b} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{2(1+b)} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & a(1-t) \\ a(1-t) & a^2 t^2 - 2a^2 t + a^2 + b^2 + 2b \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 2a^2(t-1) \end{bmatrix}$$



Mesures de déformation (exemple)

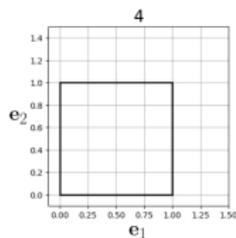
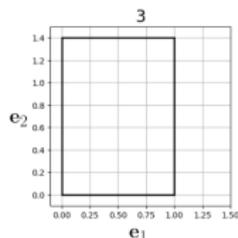
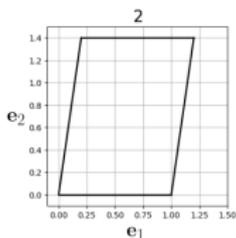
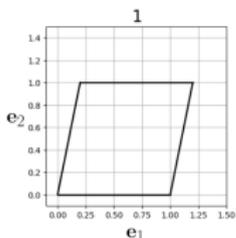
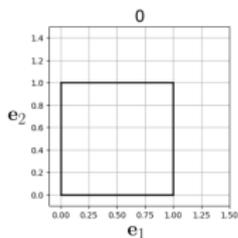
$$4 \rightarrow 5 \quad 3 \leq \bar{i} \leq 4 \quad (\bar{i} = t - 3) :$$

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{x}_0, t) = x_{01} \\ x_2(\mathbf{x}_0, t) = (1 + b - bt)x_{02} \end{cases}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + b - bt \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1 + b - bt} \begin{bmatrix} 1 + b - bt & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{1 + b - bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{1 + b - bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (b - bt)(b - bt + 2) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b^2t - 2b(1 + b) \end{bmatrix}$$

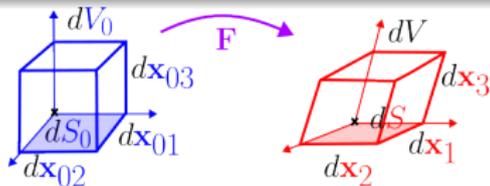


Mesures de déformation (exemple)

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 \mathbf{D}(\bar{t}) d\bar{t} &= \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{2(1+b)} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix} dt \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{1}{1+b-bt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} dt \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln(1+b) \end{bmatrix} + \frac{1}{2(1+b)} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\ln(1+b) \end{bmatrix} = \frac{ab}{2(1+b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 \dot{\mathbf{E}}(\bar{t}) d\bar{t} &= \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 2a^2t \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b(bt+1) \end{bmatrix} dt + \int_0^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 2a^2(t-1) \end{bmatrix} dt \\
 &\quad + \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b^2t - 2b(1+b) \end{bmatrix} dt \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(b+2) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & -a^2 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b(b+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Déformation des surfaces et volumes



Variation de volume

$$\begin{cases} dV_0 = dx_{01} \cdot (dx_{02} \wedge dx_{03}) \\ dV = dx_1 \cdot (dx_2 \wedge dx_3) \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{\mathbf{F} \cdot dx_{01} \cdot (\mathbf{F} \cdot dx_{02} \wedge \mathbf{F} \cdot dx_{03})}{dx_{01} \cdot (dx_{02} \wedge dx_{03})} = \det(\mathbf{F}) = J$$

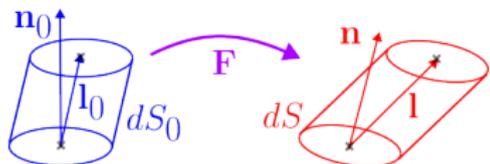
Dilatation volumique

$$J = \frac{dV}{dV_0}$$

$0 < J < 1$: Contraction volumique / $J > 1$: Expansion volumique

Déformation volumique

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1$$



Transformation d'un cylindre

$$n_0 dS_0 = dx_{10} \wedge dx_{20} \quad n dS = dx_1 \wedge dx_2$$

$$\begin{cases} dV_0 = l_0 \cdot n_0 dS_0 \\ dV = l \cdot n dS = J dV_0 \end{cases} \quad l = \mathbf{F} \cdot l_0$$

$$J l_0 \cdot n_0 dS_0 = l \cdot n dS = \mathbf{F} \cdot l_0 \cdot n dS = l_0 \cdot \mathbf{F}^t \cdot n dS$$

Formule de Nanson

$$n dS = J \mathbf{F}^{-t} \cdot n_0 dS_0 \quad n \text{ colinéaire à } \mathbf{F}^{-t} \cdot n_0$$

$0 < J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot n_0\| < 1$: Contraction surfacique / $J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot n_0\| > 1$: expansion surfacique

Dilatation surfacique

$$\frac{dS}{dS_0} = J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot n_0\|$$

Allongement et glissement

Allongement : soit $dx_0 = dx_0 n_0$,

$$\|dx\| = \sqrt{dx^t \cdot dx} = \sqrt{dx_0^t \cdot F^t \cdot F \cdot dx_0} = \sqrt{n_0^t \cdot C \cdot n_0} dx_0$$

Extension dans la direction n_0

$$\lambda(n_0) = \frac{\|dx\|}{dx_0} = \sqrt{n_0^t \cdot C \cdot n_0}$$

Glissement : soient $dx_0 = dx_0 m_0$ et $\delta x_0 = dx_0 n_0$

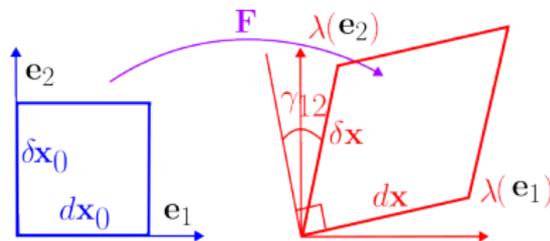
$$\gamma(m_0, n_0) = \frac{\pi}{2} - (dx, \delta x)$$

$$\sin(\gamma) = \cos(dx, \delta x) = \frac{dx \cdot \delta x}{\|dx\| \|\delta x\|} = \frac{m_0^t \cdot C \cdot n_0}{\lambda(m_0) \lambda(n_0)}$$

Glissement n_0/m_0

$$\sin(\gamma) = \frac{m_0^t \cdot C \cdot n_0}{\lambda(m_0) \lambda(n_0)}$$

$$\begin{cases} \lambda(e_1) = \sqrt{C_{11}} \\ \lambda(e_2) = \sqrt{C_{22}} \end{cases} \quad \gamma_{12} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}$$



Glissement $\gamma(m_0, n_0)$

Distorsion stérique, déviation d'une direction matérielle.

Décomposition polaire

F est non singulier $\Rightarrow \exists ! R$ orthogonal et U et V symétriques définis positifs :

Décomposition polaire

$$F = R \cdot U = V \cdot R$$

U : tenseur de déformation pure droit
 V : tenseur de déformation pure gauche

Valeurs propres de U et V identiques (élongations principales)

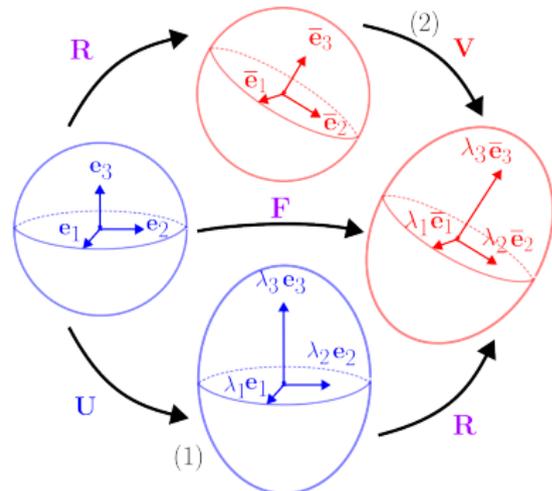
Vecteurs propres U et V différents (directions principales)

$$\begin{cases} C = F^t \cdot F = U^t \cdot R^t \cdot R \cdot U = U^2 \\ B = F \cdot F^t = V \cdot R \cdot R^t \cdot V^t = V^2 \end{cases}$$

U calculé à partir des valeurs et vecteurs propres de C :

$$\Phi = [e_1^* \quad e_2^* \quad e_3^*] \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

$$U = \Phi \cdot \sqrt{\Lambda} \cdot \Phi^t$$



Décomposition de F

$$dx = F \cdot dx_0 + dx_T = R \cdot U \cdot dx_0 + dx_T \quad (1)$$

$$= V \cdot R \cdot dx_0 + dx_T \quad (2)$$

(1) : (i) élongation (ii) rotation (iii) translation

(2) : (i) rotation (ii) élongation (iii) translation

$$B = F \cdot F^t = R \cdot U \cdot U^t \cdot R^t = R \cdot C \cdot R^t$$

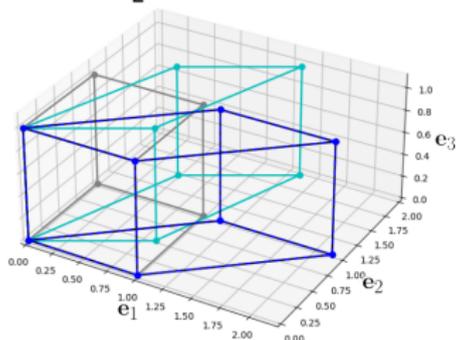
Décomposition polaire (exemple)

$$\text{Cisaillement simple : } \begin{cases} x_1 = x_{01} + kx_{02} \\ x_2 = x_{02} \\ x_3 = x_{03} \end{cases}$$

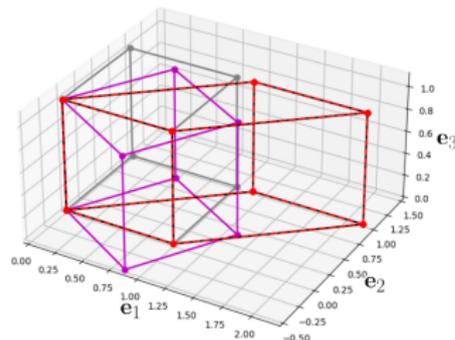
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^t = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}/6 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Trajet (1) : $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$



Trajet (2) : $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

Tableaux des tenseurs de déformation

lagrangiens	eulériens	$F = R$	valeurs propres
Cauchy-Green droit $C = F^T \cdot F$	Cauchy-Green gauche $B = F \cdot F^T$	I	λ^2
déformation propre droit $U = \sqrt{C}$	déformation propre gauche $V = \sqrt{B}$	I	λ
déformation logarithmique droite $\ln U$	déformation logarithmique gauche $\ln V$	0	$\ln \lambda$
Green-Lagrange $E = \frac{1}{2}(C - I)$	Almansi-Euler $A = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$	0	$\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) /$ $\frac{1}{2}(1 - 1/\lambda^2)$
déformation nominale droite (Biot) $\epsilon^U = U - I$	déformation nominale gauche $\epsilon^V = V - I$	0	$\lambda - 1$
$e^U = R^t \cdot e^V$	$e^V = R \cdot e^U$	vecteurs propres	

Déformation sphérique (élongations principales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$) :

$$U = V = \lambda I \quad C = B = \lambda^2 I \quad \ln(U) = \ln(V) = \ln(\lambda) I \quad E = A = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) I \quad \epsilon^U = \epsilon^V = (\lambda - 1) I$$

Déformation isovolume (élongations principales $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$) :

$$\det(U) = \det(V) = \det(C) = \det(B) = e^{tr(\ln(U))} = e^{tr(\ln(V))} = 1$$

Toute déformation peut-être décomposée de manière unique et commutative en une déformation sphérique et une déformation isovolume.

$$\text{Ex : } C = \left(J^{2/3} I\right) \cdot \left(J^{-2/3} C\right) \quad E = E^{sph} + E^{isov} + E^{sph} \cdot E^{isov} \quad \begin{cases} E^{sph} = \frac{1}{2} \left(J^{2/3} - 1\right) I \\ E^{isov} = J^{-2/3} E + \frac{1}{2} \left(J^{-2/3} - 1\right) I \end{cases}$$

Cas des petites perturbations (exemple)

Rotation de corps rigide (angle θ) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) - 1 & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Déformation ingénieur :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{01}} = \cos(\theta) - 1 \approx -\frac{\theta^2}{2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_{02}} = \cos(\theta) - 1 \approx -\frac{\theta^2}{2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_{02}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_{01}} \right) = 0 \end{cases}$$

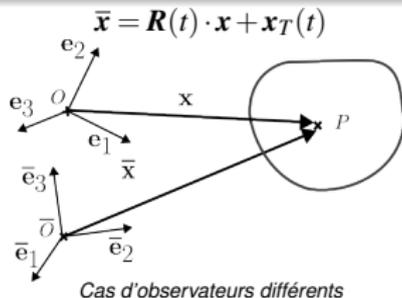
Niveau de déformation attendu $\approx 10^{-2}$
Erreur acceptable 1%

\Rightarrow Rotations au plus de l'ordre de 10^{-2} radians

Niveau de déformation attendu $\approx 10^{-4}$
Erreur acceptable 1%

\Rightarrow Rotations au plus de l'ordre de 10^{-3} radians

Objectivité des tenseurs



Représentation intrinsèque des grandeurs.

Objectivité

$$\bar{a} = a \quad \bar{a} = \mathbf{R} \cdot a \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^t$$

Composantes dépendent de la différence d'orientation mais pas du mouvement relatif.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad \bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad \bar{\mathbf{L}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}(t)) = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}$$

\mathbf{F} : non objectif

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^t \cdot \bar{\mathbf{F}} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{F})^t \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

\mathbf{C} : non objectif

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^t = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{F})^t = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}^t$$

\mathbf{B} : objectif

Cas sans translation de corps rigide : $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \bar{\mathbf{x}}$

\mathbf{v} : non objectif

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^t + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t$$

\mathbf{L} : non objectif

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{L}} + \bar{\mathbf{L}}^t) = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{R}^t) + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^t$$

\mathbf{D} : objectif

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}^t + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^t)$$

\mathbf{W} : non objectif

1 Cinématique des Milieux Continus

- Description du mouvement
- Tenseurs de déformation
- Objectivité des tenseurs

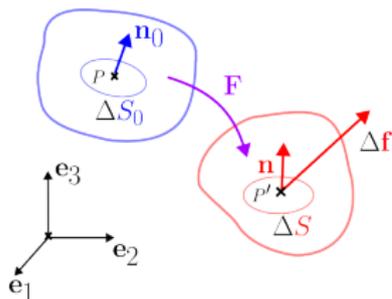
2 Mécanique des Milieux Continus

- Tenseurs de contrainte
- Lois de conservation
- Dérivées objectives de contrainte

3 Lois de Comportement

- Thermique
- Hyperélasticité
- Hypoélasticité

Tenseurs des contraintes 1



Configurations initiale et actuelle

Densité surfacique de force de contact sur les domaines intérieurs.

Tenseur des contraintes de Cauchy

$$\exists \mathbf{T} \text{ application linéaire, } \mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{force et section "actuelles"})$$

Conditions aux bords pour résoudre le problème : $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_{ext}^s$.

Contrainte normale à une facette : $t_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. (traction : $t_n > 0$)

Tenseur des "contraintes nominales" Piola-Kirchhoff 1

$$\mathbf{t}_0 = \lim_{\Delta S_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S_0} = \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{n}_0 \quad (\text{force "actuelle" et section "initiale"})$$

\mathbf{P} est non symétrique.

$$\text{Relation entre Cauchy et PK1 : } d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N} dS_0 = \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \Rightarrow \mathbf{P}^t = \mathbf{J} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-t}$$

On cherche \mathbf{S} lagrangien tel que $d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0$ avec $d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{n}_0 dS_0$.

Tenseur de Piola-Kirchhoff 2

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-t} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-t}$$

PK2 sans sens physique véritable mais symétrique.

Tenseur de Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{F}^t$$

Changement de domaine d'intégration : $\int_{\Omega} \mathbf{T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV_0$

Tenseurs des contraintes 2

Approche corotationnelle : repère associé à chaque point matériel qui tourne avec la matière (repère corotationnel déterminé à partir de la décomposition polaire).

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^t \right) \quad \begin{cases} \hat{T} = R^t \cdot T \cdot R \\ \hat{D} = R^t \cdot D \cdot R \end{cases} \quad \hat{T} : \text{contrainte "non tournée"}$$

Permet d'utiliser la théorie des petites perturbations.

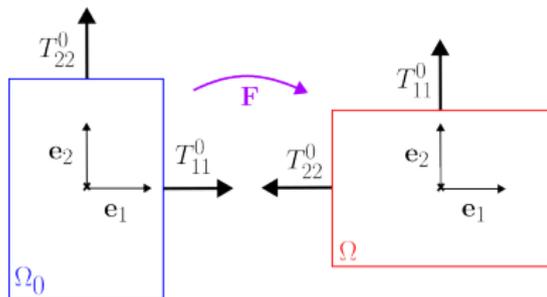
Facilité de traitement des éléments structuraux et des matériaux anisotropes.

Transformation des contraintes :

	Cauchy T	PK1 P	PK2 S	Corotationnel \hat{T}
T	x	$J^{-1} F \cdot P$	$J^{-1} F \cdot S \cdot F^t$	$R \cdot \hat{T} \cdot R^t$
P	$J F^{-1} \cdot T$	x	$S \cdot F^t$	$J U^{-1} \cdot \hat{T} \cdot R^t$
S	$J F^{-1} \cdot T \cdot F^t$	$P \cdot F^{-t}$	x	$J U^{-1} \cdot \hat{T} \cdot U^{-1}$
\hat{T}	$R^t \cdot T \cdot R$	$J^{-1} U \cdot P \cdot R$	$J^{-1} U \cdot S \cdot U$	x
J	$J T$	$F \cdot P$	$F \cdot S \cdot F^t$	$J R \cdot \hat{T} \cdot R^t$

Utile pour passer d'une description lagrangienne à eulérienne et inversement.

Tenseurs des contraintes (exemples)



État initial :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(t=0)} &= \begin{bmatrix} T_{11}^0 & 0 \\ 0 & T_{22}^0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{S}_{(t=0)} = \mathbf{P}_{(t=0)} = \hat{\mathbf{T}}_{(t=0)} \end{aligned}$$

Rotation de $\pi/2$ avec état de contraintes figé

$$\text{Rotation de corps rigide : } \mathbf{F} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = \det(\mathbf{F}) = 1$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{22}^0 & 0 \\ 0 & T_{11}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T_{11}^0 \\ -T_{22}^0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{non symétrique et non constant par rotation}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-t} = \begin{bmatrix} T_{22}^0 & 0 \\ 0 & T_{11}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^0 & 0 \\ 0 & T_{22}^0 \end{bmatrix} \quad \text{symétrique et inchangé par rotation}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{11}^0 & 0 \\ 0 & T_{22}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^0 & 0 \\ 0 & T_{22}^0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{S} \text{ en l'absence de déformation}$$

Lois de conservations (préliminaires)

Système fermé : pas de flux de matière à travers les frontières Γ du domaine matériel Ω .

Extensivité

Ψ extensive $\Rightarrow \exists \phi$ tel que $\Psi(\Omega) = \int_{\Omega} \phi(M) dV$ Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue

Lemme fondamental

Soit $f(\mathbf{x}, t) \in C^{-1}$ telle que $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dV = 0, \forall \Omega$ et $\forall t \in [0, \bar{t}]$
 alors $f(\mathbf{x}, t) = 0$ dans Ω pour $t \in [0, \bar{t}]$.

Théorème de Gauss

Soit $f(\mathbf{x}) \in C^0$ éventuellement par partie :

$\int_{\Omega} \mathbf{grad}(g(\mathbf{x})) dV$	=	$\int_{\Gamma} \mathbf{n} g(\mathbf{x}) dS$	scalaire
$\int_{\Omega} \mathbf{div}(g(\mathbf{x})) dV$	=	$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) dS$	vecteur
$\int_{\Omega} \mathbf{grad}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) dV$	=	$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{G}(\mathbf{x}) dS$	tenseur

intégrale de volume \leftrightarrow intégrale de surface
 intégrale de surface \leftrightarrow intégrale de contour

Théorème de transport de Reynold

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} f dV &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{x}_0, t) J(\mathbf{x}_0, t)) dV_0 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t} J + f \frac{\partial J}{\partial t} \right) dV_0 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t} J + f J \mathbf{div}(\mathbf{v}) \right) dV_0 \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \mathbf{div}(\mathbf{v}) \right) dV \end{aligned}$$

Conservation de la masse

Masse : grandeur physique extensive objective mesurant la quantité de matière.

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV$$

ρ masse volumique (grandeur non-extensive).

Description eulérienne : $\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dV \stackrel{th.R.}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad \forall \Omega$

Conservation de la masse (description eulérienne)

$$\text{Forme locale : } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Cas d'un matériau incompressible : $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$

Forme conservative (mécanique des fluides) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$

Description lagrangienne : $\int_{\Omega} \rho dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV_0 = Cte \Rightarrow \int_{\Omega_0} (\rho J - \rho_0) dV_0 = 0 \quad \forall \Omega_0$

Conservation de la masse (description lagrangienne)

$$\text{Forme locale intégrée : } \rho(\mathbf{x}_0, t) J(\mathbf{x}_0, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$$

Cas d'un domaine géométrique : on intègre la forme locale sur un domaine qui fait entrer et sortir de la matière.

Conservation de la quantité de mouvement (description eulérienne)

2ème Loi de Newton

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \mathbf{f} \quad \text{Référentiel Galiléen} \quad \begin{cases} \mathbf{f}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dS \\ \mathbf{p}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho \mathbf{b} : \text{densité volumique de force} \\ \mathbf{t} : \text{densité surfacique de force} \end{array}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \stackrel{\text{th.R.}}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{v}) + \text{div}(\mathbf{v}) \rho \mathbf{v} \right) dV = \int_{\Omega} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) \right)}_{=0} \right) dV = \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS \stackrel{\text{th.C.}}{=} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \stackrel{\text{th.G.}}{=} \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}) dV$$

Description eulérienne :

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \text{div}(\mathbf{T}) \right) dV = 0 \quad \forall \Omega$$

Équation de mouvement (description eulérienne)

$$\text{Forme locale : } \underbrace{\rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right)}_{\text{termes d'inertie}} = \underbrace{\mathbf{div}(\mathbf{T}(\mathbf{x}, t))}_{\text{forces internes volumiques}} + \underbrace{\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}_{\text{forces externes volumiques}}$$

$$\text{Forme conservative : } \frac{D\rho \mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad}(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{b}$$

Conservation de la quantité de mouvement (description lagrangienne)

$$df = \rho b dV = \rho b J dV_0 = \rho_0 b dV_0$$

2ème Loi de Newton

$$\frac{Dp}{Dt} = f \quad \text{Référentiel Galiléen} \quad \begin{cases} f(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}_0, t) dV_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{x}_0, t) dS_0 \\ p(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) dV_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho b : \text{densité volumique de force} \\ t_0 : \text{densité surfacique de force} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) dV_0 &\stackrel{\text{th.R.}}{=} \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} dV_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} dV_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0 dS_0 \\ \int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0 dS_0 &\stackrel{\text{th.C.}}{=} \int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \stackrel{\text{th.G.}}{=} \int_{\Omega_0} \mathbf{div}_0(\mathbf{P}) dV_0 \end{aligned}$$

Description lagrangienne :

$$\int_{\Omega_0} \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_0 \mathbf{b} - \mathbf{div}_0(\mathbf{P}) \right) dV_0 = 0 \quad \forall \Omega_0$$

Équation de mouvement (description lagrangienne)

$$\text{Forme locale : } \underbrace{\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t)}_{\text{termes d'inertie}} = \underbrace{\mathbf{div}_0(\mathbf{P}(\mathbf{x}_0, t))}_{\text{forces internes volumiques}} + \underbrace{\rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}_0, t)}_{\text{forces externes volumiques}}$$

Conservation du moment cinétique

2ème Loi de Newton

$$\delta_O = m_O \quad \text{Référentiel Galiléen} \quad \begin{cases} m_O = \int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dS \\ \delta_O = \int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho \mathbf{b} : \text{densité volumique de force} \\ \mathbf{t} : \text{densité surfacique de force} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{x} \wedge \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV &= \int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &\stackrel{\text{th.G.}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{b} + \text{div}(\mathbf{H} : \mathbf{x} \otimes \mathbf{T})) dV \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{b} + \text{div}(\mathbf{T})) + \mathbf{H} : \mathbf{T}) dV \end{aligned}$$

Description eulérienne :

$$\int_{\Omega} \left(\mathbf{x} \wedge \left(\underbrace{\frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \rho \mathbf{b} + \text{div}(\mathbf{T})}_{=0} \right) - \mathbf{H} : \mathbf{T} \right) dV = 0 \quad \forall \Omega$$

Symétrie du tenseur \mathbf{T}

$$\mathbf{H} : \mathbf{T} = 0$$

Description mixte :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \Rightarrow J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = (J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P})^t \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{F}^t$$

Toujours pas de symétrie de \mathbf{P} .

Description lagrangienne :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{F}^t \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{S}^t$$

Symétrie de \mathbf{S} .

La conservation du moment cinétique n'ajoute pas d'équation mais réduit le nombre de composantes.

1er principe de la thermodynamique (description eulérienne)

χ_i : variables d'état (champs matériels nécessaires et suffisants pour définir l'état actuel du système).

e : énergie interne massique objective, fonction d'état scalaire : $e = f_e(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m)$.

Conservation de l'énergie

$$\frac{D}{Dt} E^{cin} + \frac{D}{Dt} E^{int} = P^{ext} + P^{cal} \quad \begin{cases} \frac{D}{Dt} E^{cin} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \\ \frac{D}{Dt} E^{int} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho e dV \end{cases} \quad \begin{cases} P^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS \\ P^{cal} = \int_{\Omega} \rho r dV - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS \end{cases}$$

ρr : source volumique d'apport de chaleur / \mathbf{q} : flux de chaleur

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV & \stackrel{th.R.}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{De}{Dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV \\ \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS & \stackrel{th.C.}{=} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Omega} (\mathbf{D} : \mathbf{T} + \mathbf{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v}) dV \quad - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS \stackrel{th.G.}{=} - \int_{\Omega} \mathbf{div}(\mathbf{q}) dV \\ \int_{\Omega} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \mathbf{D} : \mathbf{T} + \mathbf{div}(\mathbf{q}) - \rho r + \mathbf{v} \cdot \left(\underbrace{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{div}(\mathbf{T}) - \rho \mathbf{b}}_{=0} \right) \right) dV & = 0 \quad \forall \Omega \end{aligned}$$

Equation de la chaleur (description eulérienne)

Forme locale :	$\rho \frac{De}{Dt}$	=	$\mathbf{D} : \mathbf{T}$	-	$\mathbf{div}(\mathbf{q})$	+	ρr
	taux d'énergie interne		puissance volumique des efforts intérieurs		conduction thermique		source de chaleur externe

1er principe de la thermodynamique (description lagrangienne)

$$\rho_0 e dV_0 = \rho_0 e J^{-1} dV = \rho e dV \quad \int_{\Gamma_0} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q}_0 dS_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS = \int_{\Gamma_0} J \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q} dS_0, \quad \forall \Gamma_0 \Rightarrow \mathbf{q}_0 = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{D}{Dt} E^{cin} + \frac{D}{Dt} E^{int} = P^{ext} + P^{cal} \quad \begin{cases} \frac{D}{Dt} E^{cin} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV_0 \\ \frac{D}{Dt} E^{int} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 e dV_0 \end{cases} \quad \begin{cases} P^{ext} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dV_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 dS_0 \\ P^{cal} = \int_{\Omega_0} \rho_0 r dV_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q}_0 dS_0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \left(\rho_0 e + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV_0 \stackrel{th.R.}{=} \int_{\Omega_0} \left(\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) dV_0$$

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 dS_0 \stackrel{th.G.}{=} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^t}{\partial t} : \mathbf{P} + \mathbf{div}_0(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{v} \right) dV_0$$

$$\int_{\Omega_0} \left(\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{F}^t}{\partial t} : \mathbf{P} + \mathbf{div}_0(\mathbf{q}_0) - \rho_0 r + \underbrace{\left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{div}_0 \mathbf{P} - \rho_0 \mathbf{b} \right) \cdot \mathbf{v}}_{=0} \right) dV_0 \quad \forall \Omega_0$$

Équation de la chaleur (description lagrangienne)

Forme locale :	$\rho_0 \dot{e}$	=	$\dot{F}^t : \mathbf{P}$	-	$\mathbf{div}_0(\mathbf{q}_0)$	+	$\rho_0 r$
	taux d'énergie interne		puissance volumique des efforts intérieurs		conduction thermique		source de chaleur externe

2nd principe de la thermodynamique

s : entropie massique (grandeur non-extensive, fonction d'état). θ : température absolue (non extensive).
La chaleur va du chaud vers le froid : $\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}\theta) \geq 0$.

Production d'entropie via des processus internes

$$\dot{S}^{int} = \dot{S} - \dot{S}^{ext} \geq 0 \quad \dot{S} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho s dV \quad \dot{S}^{ext} = \int_{\Omega} \frac{\rho r}{\theta} dV - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS$$

Description eulérienne :

$$\dot{S}^{int} = \int_{\Omega} \left(\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\theta} + \mathit{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \right) dV = \int_{\Omega} \left(\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\theta} + \frac{\mathit{div}(\mathbf{q})}{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}(\theta)}{\theta^2} \right) dV \geq 0, \quad \forall \Omega$$

Inégalité de Clausius-Duhem

$$\text{Inégalité locale : } \underbrace{\Phi}_{\text{dissipation}} = \underbrace{-\rho(\dot{e} - \theta \dot{s}) + \mathbf{T} : \mathbf{D}}_{\text{dissipation intrinsèque } \Phi^{int}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}(\theta)}{\theta}}_{\text{dissipation thermique } \Phi^{therm}} \geq 0 \quad \text{avec } \Phi^{therm} \geq 0$$

Implique l'existence d'une loi de comportement thermique et d'une loi de comportement mécanique.

Energie libre de Helmholtz

$$\Psi = e - \theta s$$

$$\begin{cases} \Phi^{int} = -\rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta}) + \mathbf{T} : \mathbf{D} \\ \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} \end{cases}$$

\mathbf{A} : variables internes.

Dissipation intrinsèque

$$\Phi^{int} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}}$$

$$\text{Dissipation intrinsèque : } \Phi_0^{int} = P_{v0}^{int} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}}$$

Description mixte :

$$P_{v0}^{int} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$$

Description lagrangienne :

$$P_{v0}^{int} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$$

Dualité contraintes/taux de déformation

Puissance volumique des efforts intérieurs :

$$\begin{aligned}
 P_{v0}^{int} &= & \dot{\mathbf{F}}^t & : & \mathbf{P} & = & (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}^t) \\
 &= & (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{F}}) & : & \mathbf{S} & \\
 &= & \left(\frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{F}) + \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{F}) \right) & : & \mathbf{S} & \\
 &= & \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{F}) & : & \mathbf{S} & \\
 &= & \dot{\mathbf{E}} & : & \mathbf{S} & = & (\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}})
 \end{aligned}$$

La dérivée de la déformation de Green-Lagrange est conjuguée en puissance à PK2.

Contrainte de Cauchy $\mathbf{T} \leftrightarrow$ taux de déformation \mathbf{D}

$$P_v^{int} = \mathbf{D} : \mathbf{T} = \mathbf{T} : \mathbf{D}$$

Contrainte corotationnelle $\hat{\mathbf{T}} \leftrightarrow$ taux de déformation corotationnel $\hat{\mathbf{D}}$

$$P_v^{int} = \hat{\mathbf{D}} : \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{D}}$$

Contrainte nominale PK1 $\mathbf{P} \leftrightarrow$ taux du gradient de déformation $\dot{\mathbf{F}}$

$$P_{v0}^{int} = \dot{\mathbf{F}}^t : \mathbf{P} = \mathbf{P}^t : \dot{\mathbf{F}}$$

Contrainte PK2 $\mathbf{S} \leftrightarrow$ taux de déformation de Green-Lagrange $\dot{\mathbf{E}}$

$$P_{v0}^{int} = \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$$

Objectivité des dérivées de contraintes

Soit T un tenseur symétrique objectif ($\bar{T} = R \cdot T \cdot R^t$) : \dot{T} est-il objectif ? $\dot{\bar{T}} \stackrel{?}{=} R \cdot \dot{T} \cdot R^t$

$$\dot{\bar{T}} = \dot{R} \cdot T \cdot R^t + R \cdot \dot{T} \cdot R^t + R \cdot T \cdot \dot{R}^t \neq R \cdot \dot{T} \cdot R^t$$

 $\dot{\bar{T}}$ n'est pas une dérivée objective !Posons $\dot{R} = \bar{L} \cdot R - R \cdot L$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{T}} &= (\bar{L} \cdot R - R \cdot L) \cdot T \cdot R^t + R \cdot \dot{T} \cdot R^t + R \cdot T \cdot (R^t \cdot \bar{L}^t - L \cdot R^t) \\ &= (\bar{L} \cdot R \cdot T \cdot R^t - R \cdot L \cdot T \cdot R^t) + R \cdot \dot{T} \cdot R^t + (\bar{T} \cdot \bar{L}^t - R \cdot T \cdot L^t \cdot R^t) \\ \overline{\dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^t} &= R \cdot (\dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^t) \cdot R^t \end{aligned}$$

Dérivée objective de Truesdell

$$\overset{\circ T}{T} = \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^t$$

Posons $\dot{R} = R \cdot W^t - \bar{W}^t \cdot R \dots$

Dérivée objective de Jaumann

$$\overset{\circ J}{T} = \dot{T} + T \cdot W - W \cdot T$$

Posons $\dot{R} = R \cdot \Omega^t - \bar{\Omega}^t \cdot R \dots$

Dérivée objective de Green-Naghdi

$$\overset{\circ GN}{T} = \dot{T} + T \cdot \Omega - \Omega \cdot T$$

1 Cinématique des Milieux Continus

- Description du mouvement
- Tenseurs de déformation
- Objectivité des tenseurs

2 Mécanique des Milieux Continus

- Tenseurs de contrainte
- Lois de conservation
- Dérivées objectives de contrainte

3 Lois de Comportement

- Thermique
- Hyperélasticité
- Hypoélasticité

Loi de comportement thermique

Conduction thermique :

Non-négativité de la dissipation thermique

$$\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}(\theta)) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} \text{ est forcément fonction de } \mathbf{grad}(\theta)$$

Loi isotrope (Fourier) :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}(\theta) \quad \text{avec } \alpha \geq 0 \quad \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}(\theta)) = -\alpha \mathbf{grad}(\theta) \cdot (-\mathbf{grad}(\theta)) = \alpha \|\mathbf{grad}(\theta)\|^2 \geq 0$$

Loi isotrope transverse (\mathbf{n}_a direction d'anisotropie) :

$$\mathbf{q} = -\alpha_1 (\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{grad}(\theta)) \mathbf{n}_a - \alpha_2 (\mathbf{grad}(\theta) - \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{grad}(\theta) \mathbf{n}_a) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_1 \geq 0 & \text{conduction dans la direction d'anisotropie} \\ \alpha_2 \geq 0 & \text{conduction transverse} \end{cases}$$

Capacité thermique massique : quantité de chaleur pour augmenter de 1K la température d'1kg de matière.

$$\begin{cases} P_v^{cal,ext} = \rho r - \text{div}(\mathbf{q}) = \rho \dot{e} - \mathbf{T} : \mathbf{D} \\ P_v^{cal,int} = \Phi_{int} = -\rho(\dot{e} - \theta \dot{s}) + \mathbf{T} : \mathbf{D} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_v^{cal,tot} = P_v^{cal,ext} + P_v^{cal,int} = \rho \theta \dot{s}$$

Capacité thermique

$$C = \frac{P_v^{cal,tot}}{\rho \dot{\theta}} = \frac{\theta}{\dot{\theta}} \dot{s} \quad (\text{fonction de la vitesse d'évolution thermodynamique})$$

$$\text{Équation de la chaleur (loi de Fourier)} : \quad \rho C \dot{\theta} + \text{div}(-\alpha \mathbf{grad}(\theta)) = \rho r + \mathbf{D} : \mathbf{T} - \rho (\Psi + \dot{\theta} s)$$

Hyperélasticité

Solide élastique : Réversibilité \Leftrightarrow Indépendance trajet de chargement \Leftrightarrow Dissipation intrinsèque nulle
Les variables d'états sont θ et un tenseur de déformation (ex : $\Psi = e - \theta s = f_{\Psi}(\theta, C)$).

Fonctions scalaires isotropes

$$f(\text{rot}_R(\boldsymbol{\chi}_1), \text{rot}_R(\boldsymbol{\chi}_2), \dots) = f(\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2, \dots) \quad \forall R$$

Ainsi, $\exists \bar{f} : f(\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2, \dots) = \bar{f}(I_1, I_2, \dots, I_m)$ I_i : invariants propres et croisés des tenseurs de f

Ex : $f_{\Psi}(\theta, C) = \bar{f}_{\Psi}(\theta, I_1, I_2, I_3)$

Le comportement mécanique est entièrement défini par la fonction d'état Ψ :

Description lagrangienne : $\Phi^{int} = S : \dot{E} - \rho \dot{\Psi}(E) = 0 \Rightarrow S = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E}$ (relation indépendante du repère)

Propriétés de l'énergie libre :

- Énergie nulle en absence de déformation : $\Psi(E = \mathbf{0}) = 0$
- Etat de référence libre de contraintes : $\frac{\partial \Psi}{\partial E} |_{E=0} = 0$
- Coercivité : $\lim_{J \rightarrow +\infty} \Psi(F) = +\infty, \quad \lim_{J \rightarrow 0^+} \Psi(F) = +\infty$
- Polyconvexité : $\Psi(F) = \Psi^*(F, \text{cof}(F), \det(F)), \quad \Psi^*$ convexe

Invariants d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(C) \\ I_2 = C : C \\ I_3 = \det(C) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial C} = I \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} = 2C \\ \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_3 C^{-1} \end{cases}$$

$$S = 2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial C} = 2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} I + 4\rho \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} C + 2I_3 \rho \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} C^{-1}$$

Il reste à choisir Ψ .

$$\mathbb{C} = \frac{\partial S}{\partial E} = 2 \frac{\partial S}{\partial C}$$

Hyperélasticité (exemple)

Changement de jeu d'invariants par combinaisons :

$$\{I_1, I_2, \dots, I_m\} \leftrightarrow \{J_1, J_2, \dots, J_m\}$$

$$\text{Dilatation pure : } \begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda X_2 \\ x_3 = \lambda X_3 \end{cases} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Invariant de \mathbf{C} :

$$\begin{cases} I_1 = \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 = 3\lambda^2 \\ I_2 = 3\lambda^4 \\ I_3 = \lambda^6 \end{cases}$$

 J_1 et J_2 constants par pure dilatation.

Invariant réduits :

$$\begin{cases} J_1 = I_1 I_3^{-1/3} = 3\lambda^2 / \lambda^2 = 3 \\ J_2 = I_2 I_3^{-2/3} = 3\lambda^4 / \lambda^4 = 3 \\ J_3 = I_3^{1/2} = \lambda^3 \end{cases}$$

$$\Psi(J_1, J_2, J_3) = \underbrace{\Psi_1(J_1, J_2)}_{\text{densité d'énergie de distorsion}} + \underbrace{\Psi_2(J_3)}_{\text{densité d'énergie de dilatation}}$$

$$\Psi_2(J_3) = \frac{K}{2} (J_3 - 1)^2 \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{matériau linéaire élastique}$$

Potentiels hyperélastiques isotropes

Loi hyperélastique de Kirchoff-Saint-Venant :

$$\Psi^{sv} = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu\mathbf{E} : \mathbf{E} \quad \mathbf{S}^{sv} = \lambda(\text{tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} = (\lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{I}) : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{sv} : \mathbf{E}$$

$$\mathbb{C}_{sv} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

Linéarité entre \mathbf{S} et \mathbf{E} . Faibles niveaux de déformation.

Forme générale

$$\Psi(I_1, I_2, I_3) = \sum_{m+n+k=1}^{\infty} A_{mnk} (I_1 - 3)^m (I_2 - 3)^n (I_3 - 3)^k$$

$$\text{Incompressibilité : } \Psi_I(I_1, I_2) = \sum_{m+n=1}^{\infty} A_{mn} (I_1 - 3)^m (I_2 - 3)^n$$

Loi de Néo-Hooke :

$$\Psi^{nh} = \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3) - \mu \ln(J) + \frac{1}{2}\lambda(J - 1)^2$$

$$\text{Incompressibilité : } \Psi_{nhI} = A_{10}(I_1 - 3)$$

$$\mathbf{S}^{nh} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda J(J - 1)\mathbf{C}^{-1}$$

40% en traction / 90% en cisaillement.

Loi de Mooney-Rivlin :

$$\Psi^{mr} = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + p_0 \ln(I_3) + \frac{1}{2}\beta (\ln(I_3))^2$$

$$\text{Incompressibilité : } \Psi_{nhI} = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3)$$

$$\mathbf{S}^{mr} = 2 \frac{\partial \Psi^{mr}}{\partial \mathbf{C}} + 2(p_0 + \beta \ln(I_3))\mathbf{C}^{-1}$$

100% en traction / difficultés en compression.

Loi de Ogden :

$$\Psi^{og} = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3 \right) + \frac{K}{2} (I_3 - 1)^2$$

$$\mu = \frac{1}{2} = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p}$$

$$\mathbf{S}_i^{og} = \sum_{p=1}^N \mu_p \lambda_i^{\alpha_p - 1} - p J^{\gamma - 1} \lambda_i^{-1}$$

$N = 1/\alpha_1 = 1 \Rightarrow$ Néo-Hooke

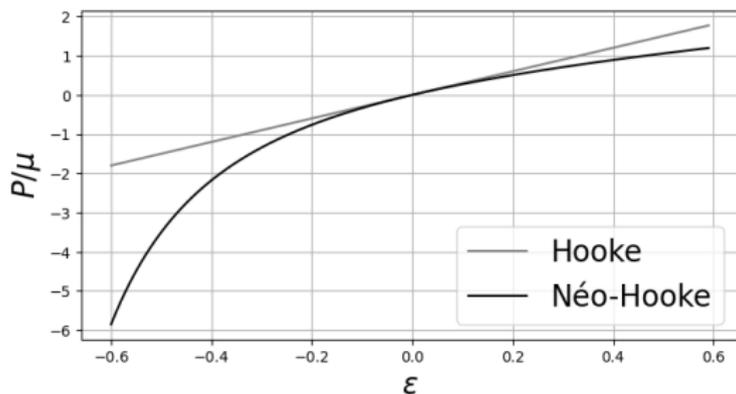
$N = 2/\alpha_1 = 2/\alpha_2 = 2 \Rightarrow$ Mooney-Rivlin.

Potentiels hyperélastiques isotropes (exemple)

$$\text{Dilatation incompressible : } \begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \frac{1}{\lambda} X_2 \\ x_3 = \frac{1}{\lambda} X_3 \end{cases} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\text{Loi de néo-Hooke : } \mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 2A_{10} \left(\boldsymbol{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Cas des petites perturbations : $E = 3\mu$ car $\nu = 0.5$.



Hypoélasticité

Dérivée objective de Cauchy :

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = f(\mathbf{T}, \mathbf{D})$$

Cas linéaire :

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbb{C} : \mathbf{D}$$

Cas des petites déformations : loi linéaire et réversible.

Cas des grandes transformations : énergie n'est pas conservée et le travail effectué sur un trajet de chargement fermé n'est pas nul.

Loi hypoélastique réservée aux lois élasto-plastiques avec déformation et dissipation faibles.

$$\overset{\circ J}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{TJ} : \mathbf{D} \quad \overset{\circ T}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{TT} : \mathbf{D} \quad \overset{\circ G}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{TGN} : \mathbf{D} \quad \mathbb{C} \text{ supposé symétrique avec } \mathbb{C}^{TJ} \neq \mathbb{C}^{TT} \neq \mathbb{C}^{TGN}$$

Relation entre les modules tangents :

	Dérivée objective	Relation constitutive	Module tangent
Jaumann (Cauchy)	$\overset{\circ J}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}$	$\overset{\circ J}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^J : \mathbf{D}$	$\mathbb{C}^{TT} = \mathbb{C}^{TJ} - \mathbb{C}^*$ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}' - \mathbf{T} \otimes \mathbf{I}$ $\mathbb{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$
Jaumann (Kirchhoff)	$\overset{\circ \mathbf{t}}{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{t}$	$\overset{\circ J}{\mathbf{t}} = \mathbb{C}^{\mathbf{t}J} : \mathbf{D}$	$\mathbb{C}^{TT} = J^{-1} \mathbb{C}^{\mathbf{t}J} - \mathbb{C}'$
Green-Naghdi (Cauchy)	$\overset{\circ GN}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T}$	$\overset{\circ G}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{TGN} : \mathbf{D}$	$\mathbb{C}^{TT} = \mathbb{C}^{TGN} - \mathbb{C}^* - \mathbb{C}^{spin}$ $\mathbb{C}^{spin} : \mathbf{D} = (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T}$ $+ \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega})^T$

Objectivité des dérivées de contraintes (exemples)

$$\text{Cisaillement simple : } \begin{cases} x_1 = x_{01} + tx_{02} \\ x_2 = x_{02} \end{cases} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jaumann : } \dot{\mathbf{T}} = (\lambda^J \text{tr}(\mathbf{D})) \mathbf{I} + 2\mu^J \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^t$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} \\ \dot{T}_{12} & \dot{T}_{22} \end{bmatrix} &= \mu^J \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{T}_{12} & \mu^J + \frac{T_{22} - T_{11}}{2} \\ \text{sym.} & -\dot{T}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Truesdell : } \dot{\mathbf{T}} = (\lambda^T \text{tr}(\mathbf{D})) \mathbf{I} + 2\mu^T \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t - \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{T}$$

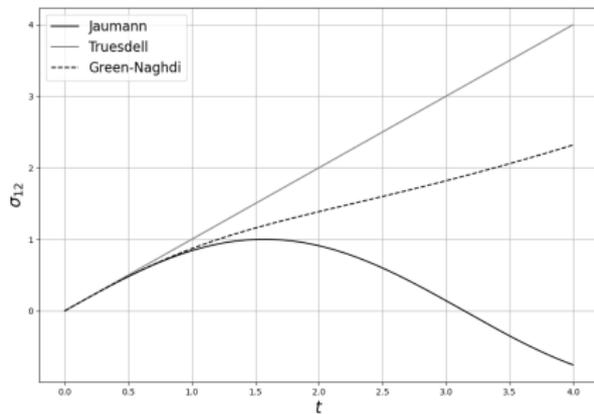
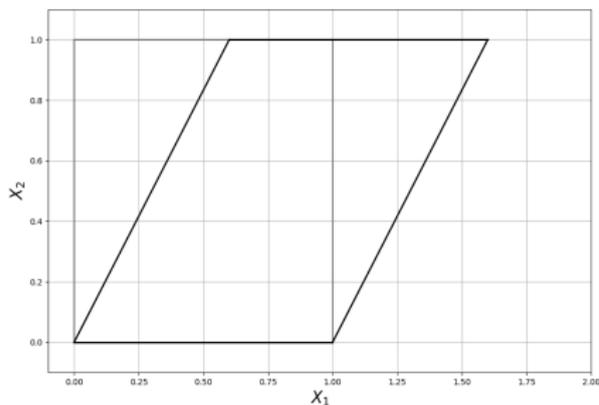
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} \\ \dot{T}_{12} & \dot{T}_{22} \end{bmatrix} &= \mu^J \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2T_{12} & \mu^T + T_{22} \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Objectivité des dérivées de contraintes (exemples)

Jaumann : $\dot{\mathbf{T}} = (\lambda^J \text{tr}(\mathbf{D}))\mathbf{I} + 2\mu^J \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^t$

Truesdell : $\dot{\mathbf{T}} = (\lambda^T \text{tr}(\mathbf{D}))\mathbf{I} + 2\mu^T \mathbf{D} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{L}^t - \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{T}$

Green-Naghdi : $\dot{\mathbf{T}} = (\lambda^J \text{tr}(\mathbf{D}))\mathbf{I} + 2\mu^J \mathbf{D} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}^t$



Évolution de la contrainte de cisailment selon la dérivée objective

Références

Cours de MMC :

- François Sidoroff, <http://sitasido.ec-lyon.fr/>
- Jean Garrigues, <https://jgarrigues.perso.centrale-med.fr/>
- Guilhem Blès, **Continuum mechanics in finite deformation**

Elements Finis :

- Formulation dynamique explicite :
Ted Belytschko et al, **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**, Wiley, 2014
- Formulation quasi-statique implicite :
Nam-Ho Kim, **Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**, Springer, 2015

Formulation faible pour les éléments finis

Formulation lagrangienne actualisée

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{cin} = 0$$

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{D} : \mathbf{T} dV$$

$$\delta P^{ext} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^t \cdot \rho \mathbf{b} dV + \sum_{j=1}^{nsd} \int_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_j dS$$

$$\delta P^{cin} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dV_0$$

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext}$$

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{T} dV$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t} dS$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{N} dV_0$$

Éléments Finis

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{N}_I(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_I(t)$$

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{grad}(\mathbf{N}_I) \cdot \mathbf{v}_I \\ &= \mathbf{B}_I \cdot \mathbf{v}_I \end{aligned}$$

Formulation lagrangienne totale

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{cin}$$

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega_0} \delta \dot{\mathbf{F}}^t : \mathbf{P} dV_0$$

$$\delta P^{ext} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v}^t \cdot \rho_0 \mathbf{b} dV_0 + \sum_{j=1}^{nsd} \int_{\Gamma_{0j}} \delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{e}_j dS_0$$

$$\delta P^{cin} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dV_0$$

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext}$$

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^t \cdot \mathbf{P} dV_0$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} dV_0 + \int_{\Gamma_{0t}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_0 dS_0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{N} dV_0$$

