

# MMC pour les fibreux en Grandes Transformations; partie 2

Guilhem Bles  
guilhem.bles@ensta-bretagne.org

Institut de Recherche Dupuy de Lôme (ENSTA Bretagne), UMR CNRS 6027, F-29200 Brest, France

Groupe de Recherche FIBMAT, 12 novembre 2024



# Contents

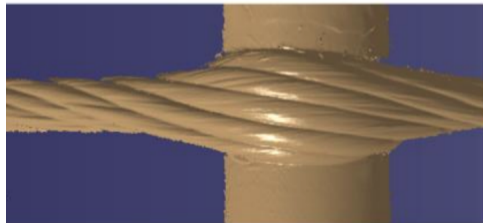
- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

## Exemples

- Tissus mous du vivant: grandes déformations!
- Matériaux fibreux pour applications biomédicales: doivent s'adapter aux déformations des tissus mous!
- Tricots: matériau très déformable!
- Tricots comme renfort d'élastomères: grandes déformations!
- Tissages textiles: l'angle entre les fils de chaîne et de trames peut partir de  $90^\circ$  jusqu'à proche de zéro;
  - ▶ déformation nominale allant jusqu'à 40 %
  - ▶ les directions d'anisotropie tournent beaucoup; il faut les suivre!
- Torons, fils, mèches: modélisation comme un milieu continu anisotrope:



Scan 3D d'un toron en contact avec un axe rigide (Civier, 2023):

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)**
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

# Lois hyperélastiques

Ces lois sont un bon début pour proposer des lois de comportement anisotropes en grandes transformations.

La viscosité ou la plasticité peut être ajoutée par la suite.

## Définition

- 1  $(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  is a complete set of thermodynamic state variables, where  $\theta$  is the temperature and  $\tilde{\mathbf{E}}$  is the right Green-Lagrange strain tensor,
- 2 the thermodynamic properties are described by a potential function  $W(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$ , equal to the free energy per unit of reference volume,
- 3 the specific intrinsic dissipation is always null.

# Lois hyperélastiques

Par définition

$$\rho_o \cdot \psi = W(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) + \text{constante} \quad (1)$$

où  $\psi$  est l'énergie libre par unité de masse,  $\rho_o$  la masse volumique dans la configuration de référence  $\Omega_0$ .

En dérivant par rapport au temps,  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  et  $\forall(\dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{E}}})$ :

$$\rho_o \cdot \dot{\psi} = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\tilde{\mathbf{E}}}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \dot{\theta} + \left( \frac{\partial W}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \right)_{\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \quad (2)$$

$$= J \cdot \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{D}} - \rho_o \cdot s \cdot \dot{\theta} - \rho_o \cdot \varphi_1 \quad (3)$$

où

- $\tilde{\mathbf{T}}$ , la contrainte de Cauchy
- $\tilde{\mathbf{D}}$ , le taux de déformation
- $s$ , l'entropie par unité de masse
- $\varphi_1$ , la dissipation intrinsèque

# Lois hyperélastiques

Par définition des lois hyperélastiques, la dissipation est nulle:

$$\varphi_1 = 0 \quad (4)$$

Donc,  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  et  $\forall(\dot{\theta}, \dot{\tilde{\mathbf{E}}})$ :

$$\rho_o \cdot \dot{\psi} = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{/\tilde{\mathbf{E}}}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \dot{\theta} + \left( \frac{\partial W}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = -\rho_o \cdot s \cdot \dot{\theta} + J \cdot \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{D}} \quad (5)$$

Alors,  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$ :

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{/\tilde{\mathbf{E}}}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) = -\rho_o \cdot s \quad (6)$$

et  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  et  $\forall \dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ :

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = J \cdot \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{D}} \quad (7)$$



## Lois hyperélastiques

$\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  et  $\forall \dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ :

$$\left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = J \cdot \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{D}} \quad (8)$$

Or,

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \quad \iff \quad \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (9)$$

Donc,  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$  et  $\forall \dot{\tilde{\mathbf{E}}}$ :

$$\left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = J \cdot \tilde{\mathbf{T}} : \left( \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \right) \quad (10)$$

$$= J \cdot \left( \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \right) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \quad (11)$$

## Lois hyperélastiques

Donc,  $\forall(\theta, \tilde{\mathbf{E}})$ :

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{W}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}}\right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) = J. \left(\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-\top}\right) \quad (12)$$

le membre de droite est défini comme une nouvelle contrainte, le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff  $\tilde{\mathbf{S}}$ :

$$\tilde{\mathbf{S}} = J. \left(\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-\top}\right) \quad (13)$$

Donc, la contrainte d'une loi hyperélastique isotrope ou anisotrope:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{W}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}}\right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \quad \text{ou bien} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{J} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{W}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}}\right)_{/\theta}(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{\top} \quad (14)$$

# Lois hyperélastiques

Donc toute la loi de comportement est définie par le choix du potentiel:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \quad (15)$$

La variable de déformation  $\tilde{\mathbf{E}}$  peut aussi être choisie autrement:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}) \quad \text{ou bien} \quad W(\theta, \widetilde{\mathbf{LnU}}) \quad (16)$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}$  est le tenseur de déformation Cauchy-Green droit et  $\widetilde{\mathbf{LnU}}$  est le tenseur de déformation de Hencky droit.

La déformation de Green-Lagrange  $\tilde{\mathbf{E}}$  peut être remplacée par toute déformation droite, i.e. basée sur le tenseur de déformation pure droit  $\tilde{\mathbf{U}}$ , issu de la décomposition polaire du gradient de la transformation:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad (17)$$

## Lois hyperélastiques isotropes

Pour les matériaux isotropes, le potentiel est défini uniquement avec les invariants de déformation. Classiquement, les invariants de la déformation  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont utilisés:

$$W(\theta, I_1, I_2, I_3) \quad (18)$$

où

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (19)$$

## Lois hyperélastiques anisotropes

Pour les matériaux anisotropes, le potentiel peut être défini avec le tenseur de Green-Lagrange  $\tilde{\mathbf{E}}$ :

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) \quad (20)$$

Mais, une autre méthode est plus souvent employée, à partir d'invariants de la déformation  $\tilde{\mathbf{C}}$  et de plusieurs tenseurs de structure  $\tilde{\mathbf{M}}_k$  (Boehler, Spencer and Betten, 1987). Les tenseurs de structure rendent compte des symétries du matériau anisotrope; ils restent inchangés par les transformations qui laissent inchangé le matériau (symétries, rotations).

Les tenseurs  $\tilde{\mathbf{M}}_k$  sont dans la configuration de référence  $\Omega_0$  et sont donc constants lors des déformations.

Ensuite, le comportement hyperélastique anisotrope est représenté par un potentiel comme suit:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{M}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_n) \quad (21)$$

où cette fonction  $W$  est isotrope.

## Lois hyperélastiques anisotropes

Par exemple, pour un **matériau isotrope-transverse**, les tenseurs de structures sont:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \quad (22)$$

où  $\vec{v}_1$  est un vecteur unitaire selon l'axe d'isotropie-transverse du matériau.

Par exemple, pour un **matériau orthotrope**, les tenseurs de structures sont:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \quad \widetilde{\mathbf{M}}_2 = \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 \quad \widetilde{\mathbf{M}}_3 = \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_3 \quad (23)$$

où  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  sont trois vecteurs orthonormés selon les axes d'orthotropie du matériau.

d'après Boehler, Spencer and Betten (1987).

## Lois hyperélastiques isotropes-transverses

Pour un matériau isotrope-transverse, le potentiel hyperélastique sera défini ainsi:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{M}}_1) = W(\theta, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (24)$$

où les invariants sont

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (25)$$

$$I_4 = \text{Tr} \left( \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \right) \quad I_5 = \text{Tr} \left( \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \right) \quad (26)$$

d'après Boehler, Spencer and Betten (1987).

## Lois hyperélastiques orthotropes

Pour un matériau orthotrope, le potentiel hyperélastique sera défini ainsi:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{M}}_1, \tilde{\mathbf{M}}_2, \tilde{\mathbf{M}}_3) = W(\theta, \mathbb{I}_3, l_{4-1}, l_{4-2}, l_{4-3}, l_{5-1}, l_{5-2}, l_{5-3}) \quad (27)$$

où les invariants sont

$$\mathbb{I}_3 = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad l_{4-i} = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}_i \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad l_{5-i} = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}_i \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad (28)$$

d'après Boehler, Spencer and Betten (1987).



## Lois hyperélastiques isotropes-transverses

Pour déduire la contrainte du potentiel, il faut le dériver:

$$\left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\mathbf{E}}} \right)_{\theta} = 2 \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} \right)_{\theta} = 2 \sum_{i=1}^5 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} \quad (29)$$

Il faut dériver les invariants par rapport à la déformation:

$$\frac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = \widetilde{\mathbf{I}} \quad \frac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = I_1 \widetilde{\mathbf{I}} - \widetilde{\mathbf{C}} \quad \frac{\partial \widetilde{I}_3}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = I_3 \widetilde{\mathbf{C}}^{-1} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \widetilde{I}_4}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = \widetilde{\mathbf{M}}_1 \quad \frac{\partial \widetilde{I}_5}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_1 + \widetilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{C}} \quad (31)$$

## Dérivation d'invariant

Pour calculer la dérivée d'un invariant, voici une méthode simple; exemple de  $\frac{\partial I_5}{\partial \tilde{\mathbf{C}}}$ :  
on dérive par rapport au temps l'invariant et on exploite le fait suivant:

$$\dot{I}_5 = \frac{\partial I_5}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} : \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \quad \text{où } \tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}} = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^T) \quad (32)$$

Ainsi,

$$\dot{I}_5 = \overline{\text{Tr}[\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}]} = \text{Tr}[\overline{\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}}] = \text{Tr}\left[\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \left(\dot{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}}\right)\right] \quad (33)$$

$$= \text{Tr}\left[\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}\right] + \text{Tr}\left[\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}}\right] = \text{Tr}\left[\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}}\right] + \text{Tr}\left[\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}}\right] \quad (34)$$

$$= (\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1) : \dot{\tilde{\mathbf{C}}} + (\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}) : \dot{\tilde{\mathbf{C}}} = (\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}) : \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \quad (35)$$

## Lois hyperélastiques orthotropes

La contrainte est la dérivée du potentiel:

$$\left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\mathbf{E}}} \right)_{/\theta} = 2 \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} \right)_{/\theta} = 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}_3} \frac{\partial \widetilde{\mathbb{I}}_3}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_{4-i}} \frac{\partial \widetilde{I}_{4-i}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_{5-i}} \frac{\partial \widetilde{I}_{5-i}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} \right\} \quad (36)$$

Les dérivées des invariants par rapport à la déformation sont:

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbb{I}}_3}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = 3 \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \widetilde{\mathbf{C}} \quad \frac{\partial \widetilde{I}_{4-i}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = \widetilde{\mathbf{M}}_i \quad \frac{\partial \widetilde{I}_{5-i}}{\partial \widetilde{\mathbf{C}}} = \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_i + \widetilde{\mathbf{M}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{C}} \quad (37)$$

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant**
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

# Matériau

Schéma d'une artère (Holzapfel, Gasser and Ogden, 2000):

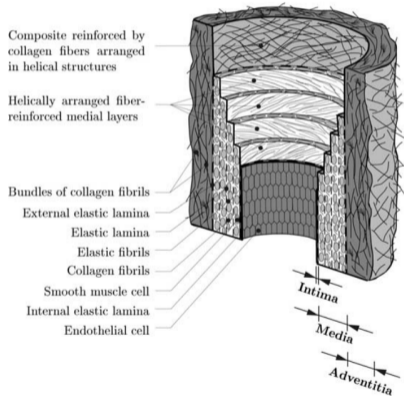


Figure 1. Diagrammatic model of the major components of a healthy *elastic* artery composed of three layers: intima (I), media (M), adventitia (A). I is the innermost layer consisting of a single layer of endothelial cells that rests on a thin basal membrane and a subendothelial layer whose thickness varies with topography, age and disease. M is composed of smooth muscle

Ces matériaux peuvent subir de grandes déformations: le formalisme des grandes transformations est nécessaire!  
 Les fibres induisent un comportement anisotrope.  
 Ils peuvent être considérés comme une matrice déformable renforcée de un ou plusieurs réseaux de fibres parallèles.

# Potentiels hyperélastiques utilisés

## Potentiel du type Fung (Holzapfel, Gasser and Ogden, 2000):

Many modifications of these strain-energy functions have been published subsequently. For example, a combined polynomial-exponential form of the strain-energy function incorporating shear deformations was given by Kas'yanov and Rachev [35]. The most general strain-energy function of *Fung's* type is formulated by Humphrey [32]. It is suitable for arbitrary (three-dimensional) states of deformations and has the form

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2}c[\exp(Q) - 1], \quad (36)$$

where  $c$  is a material parameter and  $Q$  is given by

$$Q = b_1\bar{E}_{\Theta\Theta}^2 + b_2\bar{E}_{ZZ}^2 + b_3\bar{E}_{RR}^2 + 2b_4\bar{E}_{\Theta\Theta}\bar{E}_{ZZ} + 2b_5\bar{E}_{ZZ}\bar{E}_{RR} + 2b_6\bar{E}_{RR}\bar{E}_{\Theta\Theta} + b_7\bar{E}_{\Theta Z}^2 + b_8\bar{E}_{RZ}^2 + b_9\bar{E}_{R\Theta}^2. \quad (37)$$

Here  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , are non-dimensional material parameters, while  $\bar{E}_{IJ}$ , for  $I, J = R, \Theta, Z$ , are the components of the modified Green–Lagrange strain tensor referred to cylindrical polar coordinates  $(R, \Theta, Z)$ .

In the work of Fung et al. [18] and Chuong and Fung [5] there is no *a priori* restriction on the material parameters presented. However, it is important to note that in order for the (anisotropic) function  $\bar{\Psi}$  to be convex in the sense discussed

Ce potentiel anisotrope est basé sur les composantes de la déformation  $\tilde{\mathbf{E}}$ , comme précisé plus haut à l'équation 20. Aucun tenseur de structure  $\tilde{\mathbf{M}}_k$  n'est utilisé.

# Potentiels hyperélastiques utilisés

## Potentiel avec tenseurs de structure (Holzapfel, Gasser and Ogden, 2000):

### 5.1. CONSTITUTIVE MODEL FOR THE ARTERY LAYERS

Since arteries are composed of (thick-walled) layers we model each of these layers with a separate strain-energy function. From the engineering point of view each layer may be considered as a composite reinforced by two families of (collagen) fibers which are arranged in symmetrical spirals.

We assume that each layer responds with similar mechanical characteristics and we therefore use the same form of strain-energy function (but a different set of material parameters) for each layer. We suggest an additive split of the isochoric strain-energy function  $\bar{\Psi}$  into a part  $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$  associated with *isotropic* deformations and a part  $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$  associated with *anisotropic* deformations [29]. Since the (wavy) collagen fibers of arterial walls are not active at low pressures (they do not store strain energy) we associate  $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$  with the mechanical response of the non-collagenous matrix material, which we assume to be isotropic. The resistance to stretch at high pressures is almost entirely due to collagenous fibers [49] and this mechanical response is therefore taken to be governed by the anisotropic function  $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$ . Hence, the (two-term) potential is written as

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}), \quad (57)$$

where the families of collagenous fibers are characterized by the two (reference) direction vectors  $\mathbf{a}_{0i}$ ,  $i = 1, 2$ , with  $|\mathbf{a}_{0i}| = 1$ . Note that in (57) we use  $\bar{\mathbf{C}}$  rather than  $\bar{\mathbf{E}}$  as the deformation measure.

We include structure tensors in accordance with the formulation in Section 3.1.2. Specifically, we incorporate two such tensors,  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2$ , defined as the tensor products  $\mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}$ . The integrity basis for the three symmetric second-order tensors  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  then consists of the invariants

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}}) &= \text{tr } \bar{\mathbf{C}}, & \bar{I}_2(\bar{\mathbf{C}}) &= \frac{1}{2}[(\text{tr } \bar{\mathbf{C}})^2 - \text{tr } \bar{\mathbf{C}}^2], & \bar{I}_3(\bar{\mathbf{C}}) &= \det \bar{\mathbf{C}} = 1, & (58) \\ \bar{I}_4(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}) &= \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{A}_1, & \bar{I}_5(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}) &= \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{A}_1, & & (59) \end{aligned}$$

Les tenseurs de structure ici sont:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{a}_{01} \otimes \vec{a}_{01} = \widetilde{\mathbf{A}}_1 \quad (38)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_2 = \vec{a}_{02} \otimes \vec{a}_{02} = \widetilde{\mathbf{A}}_2 \quad (39)$$

où les vecteurs  $\vec{a}_{0i}$  sont parallèles aux fibres du matériau.

Les invariants des lois isotropes-transverses données plus haut sont utilisées (éq. 26).

# Potentiels hyperélastiques utilisés

**Potentiel avec tenseurs de structure (Nolan et al., 2014):**

Suppose that the material consists of an isotropic matrix material within which are embedded two families of fibres characterized by two preferred directions in the reference configuration defined in terms of two unit vectors  $\mathbf{a}_{0i}$ ,  $i=4, 6$ . With  $\mathbf{C}$ ,  $J$  and  $\mathbf{a}_{0i}$  are defined the invariants

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_4 = \mathbf{a}_{04} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{a}_{04}), \quad I_6 = \mathbf{a}_{06} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{a}_{06}), \quad (2)$$

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1, \quad \bar{I}_4 = J^{-2/3}I_4, \quad \bar{I}_6 = J^{-2/3}I_6, \quad (3)$$

where  $\bar{I}_i$  ( $i = 1, 4, 6$ ) are the isochoric counterparts of  $I_i$ . The HGO model proposed by [Holzapfel et al. \(2000\)](#) for collagen reinforced soft tissues additively splits the strain energy  $\Psi$  into volumetric, isochoric isotropic and isochoric anisotropic terms:

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{04}, \mathbf{a}_{06}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{04}, \mathbf{a}_{06}), \quad (4)$$

where  $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$  and  $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$  are the isochoric isotropic and isochoric anisotropic free-energy contributions, respectively, and  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$  is the isochoric right Cauchy–Green deformation tensor.

Les tenseurs de structure ici sont aussi du même type que Holzapfel, Gasser and Ogden (2000):

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{a}_{04} \otimes \vec{a}_{04} \quad (40)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_2 = \vec{a}_{06} \otimes \vec{a}_{06} \quad (41)$$

où les vecteurs  $\vec{a}_{0i}$  sont parallèles aux fibres du matériau.

Les invariants  $I_4$  et  $I_6$  sont identiques à celui  $I_4$  de l'équation 26 des lois isotropes-transverses données plus haut.



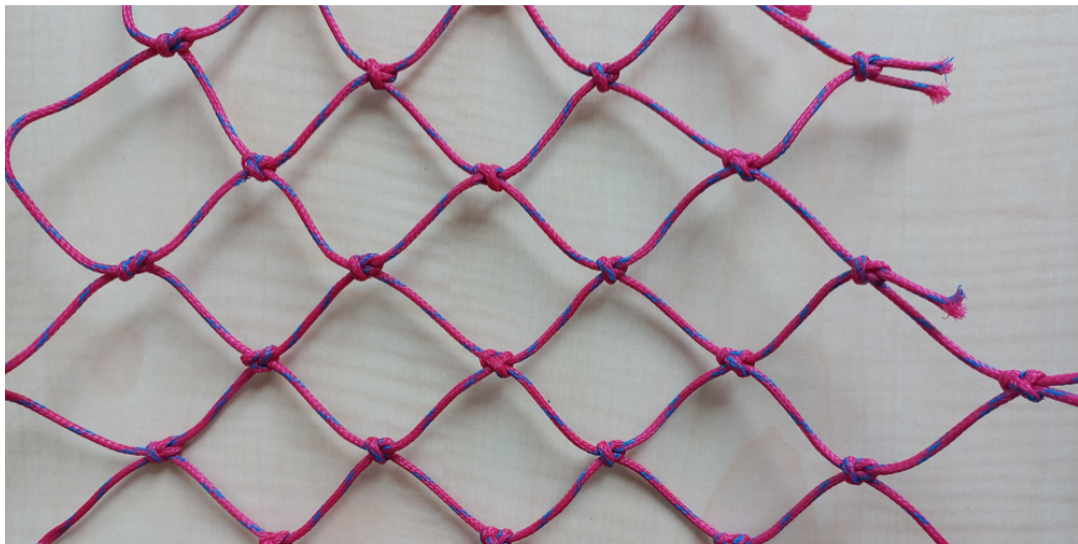
# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets**
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

## Matériau: filet de pêche



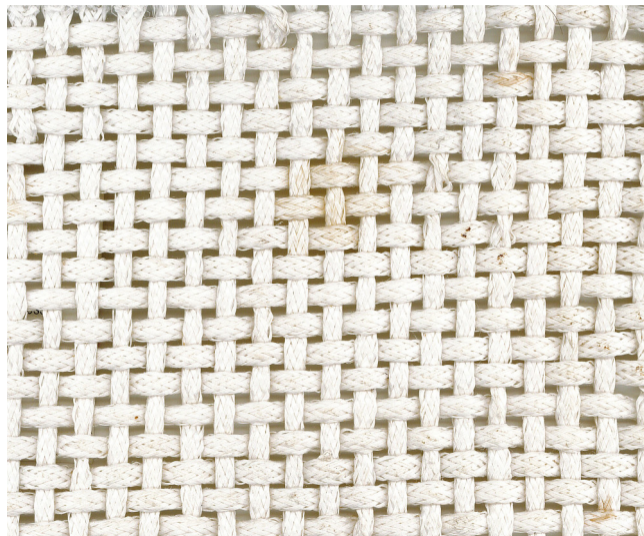
## Matériau: filet de pêche



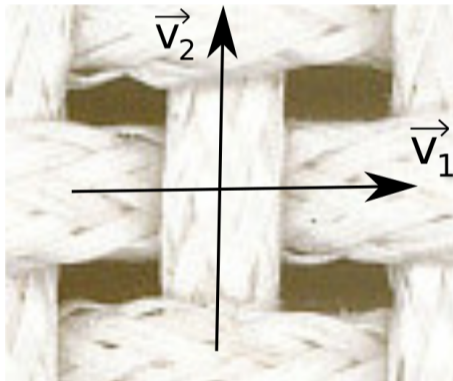
# Matériau: tricot



# Matériau: tissage



## Matériau: tissage, tricot, filet



Tous ces matériaux sont orthotropes (tricot à discuter) et peuvent être modélisés par un potentiel hyperélastique du type:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{M}}_1, \tilde{\mathbf{M}}_2) \quad (42)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 = \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 \quad (44)$$

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons**
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion

## Matériau: fil

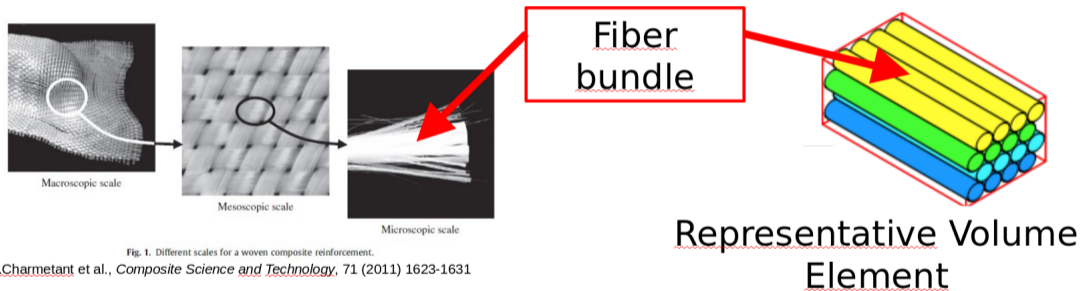


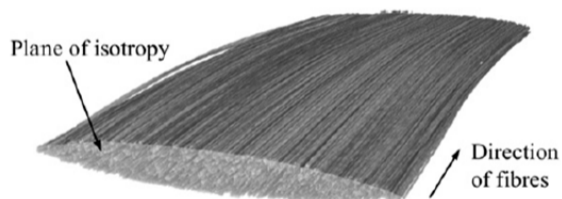
Fig. 1. Different scales for a woven composite reinforcement.

A.Charmetant et al., *Composite Science and Technology*, 71 (2011) 1623-1631



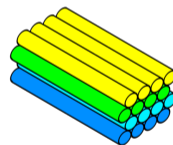
# Matériau: fil

Fil ou mèche (Charmetant, Vidal-Sallé and Boisse, 2011):



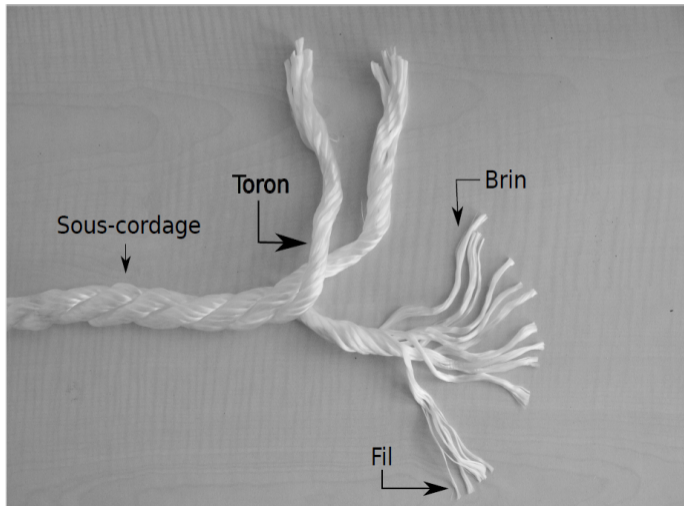
**Fig. 2.** Transverse isotropy of the yarn in a textile reinforcement. X-ray tomography imaging.

Un fil peut être modélisé comme un volume d'un milieu continu constitué d'un matériau, qui est un faisceau de fibres les unes contre les autres:



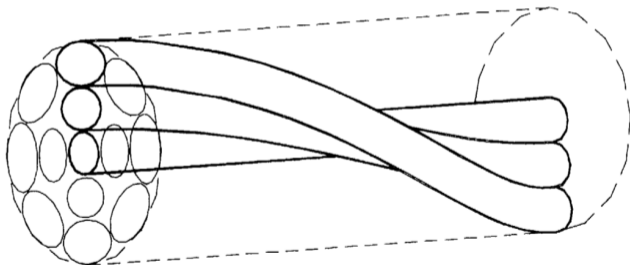
# Matériau: toron

Cordage formé de 3 torons (Civier, 2023):

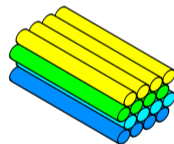


# Matériau: toron

Schéma d'un toron formé de fils (ou brins) en hélice  
(Leech, 2002):

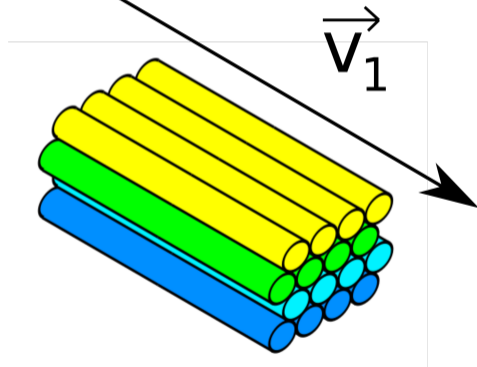


Un toron peut être modélisé  
comme un volume d'un milieu  
continu constitué d'un matériau,  
qui est un faisceau de fils les uns  
contre les autres:



# Loi de comportement pour un faisceau de fibres/fils

Un faisceau de fibres ou de fils les uns contre les



autres:

La loi de comportement de ce matériau de faisceau de fibres/fils peut être une loi hyperélastique isotrope-transverse:

$$W(\theta, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{M}}_1) = W(\theta, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (45)$$

Le tenseur de structure sera alors

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \quad (46)$$

où  $\vec{v}_1$  est un vecteur unitaire selon l'axe d'isotropie-transverse du matériau, ici la direction des fibres/fils.

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique**
- 7 Conclusion

## Invariants basés sur les mathématiques

Ces invariants

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (47)$$

sont basés sur le polynôme caractéristique d'un tenseur d'ordre deux.

Ces invariants

$$I_4 = \text{Tr} (\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad I_5 = \text{Tr} (\tilde{\mathbf{M}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad (48)$$

$$I_{4-i} = \text{Tr} (\tilde{\mathbf{M}}_i \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad I_{5-i} = \text{Tr} (\tilde{\mathbf{M}}_i \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) \quad (49)$$

sont basés sur la théorie des représentations (Boehler, Spencer and Betten, 1987).

Mais où est la physique (i.e. la mécanique) ?

## Pourquoi des invariants basés sur la physique ?

Parce que le modélisateur doit choisir le potentiel qui sera la loi de comportement.

Son travail sera plus simple si le potentiel est formulé ainsi:

$$W(\theta, \text{ changement de volume, } \\ \text{élongation des fibres, } \\ \text{cisaillement de la matrice, } \\ \text{friction entre les fibres, } \dots) \quad (50)$$

plutôt qu'ainsi

$$W(\theta, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (51)$$

où chaque invariant  $I_i$  est le résultat combiné des phénomènes physiques/mécaniques.

# Pourquoi des invariants basés sur la physique ?

En effet, ainsi, il pourra choisir des énergies associées à chaque phénomène physique:

$$\begin{aligned} W(\theta, \tilde{\mathbf{E}}) &= W_a(\theta, \text{changement de volume}), \\ &+ W_b(\theta, \text{élongation des fibres}), \\ &+ W_c(\theta, \text{cisaillement de la matrice}), \\ &+ W_d(\theta, \text{friction entre les fibres}), \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{52}$$

Puisque chaque phénomène physique aura très probablement son comportement propre et différent de celui des autres phénomènes.



# Invariants physiques pour un tissage

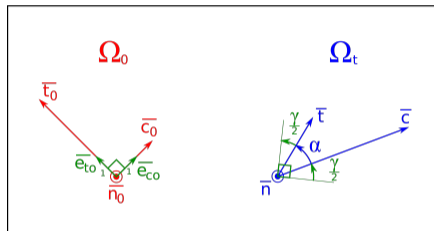
On suppose que l'énergie de déformation sera de 3 types fonctions des modes de déformation suivants (Dib, 2014; Er-Rafik, 2026):

- élongation des fils de chaîne
- élongation des fils de trame
- changement de l'angle entre la chaîne et la trame.

La chaîne sont les fils dans la longueur du tissage, tandis que la trame sont les fils du tissage dans la largeur du tissage produit.

## Invariants physiques pour un tissage

Directions des chaînes et trames d'un tissage non-déformé  $\Omega_0$  ( $\vec{c}_0, \vec{t}_0$ ) et déformé  $\Omega_t$  ( $\vec{c}, \vec{t}$ ), et angle  $\alpha$  entre les chaînes et trames:



Les vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{t}$  sont matériels, i.e. ils sont emportés par la déformation de la matière.

Ainsi, les déformations sont:

- élongation des fils de chaîne:  $\varepsilon_c = \ln \frac{c}{c_0}$
- élongation des fils de trame:  $\varepsilon_t = \ln \frac{t}{t_0}$
- déformation de changement de l'angle:  $\varepsilon_{ct} = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

où  $c$  et  $t$  sont les normes des vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{t}$ .

# Invariants physiques pour un tissage

L'énergie libre  $\psi$  par unité de masse est choisie ainsi:

$$dm \psi(\theta, \varepsilon_c, \varepsilon_t, \varepsilon_{ct}) = dm_c W_c(\theta, \varepsilon_c) + dm_t W_t(\theta, \varepsilon_t) + dm W_{ct}(\theta, \varepsilon_{ct}) \quad (53)$$

où  $dm$  est la masse d'un VER de tissage,  $dm_c$  la masse des chaînes dans ce VER et  $dm_t$  la masse des trames et:

- énergies  $W_c$  et  $W_t$ : comportement en traction des chaînes et des trames
- énergie  $W_{ct}$ : comportement des points de liage du tissage (phénomène de blocage lorsque l'angle chaîne-trame tend vers zéro).

# Invariants physiques pour un tissage

La contrainte de Cauchy déduite de cette loi hyperélastique anisotrope est (Dib et al., 2018):

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho_t^c \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_c} (\vec{e}_c \otimes \vec{e}_c) + \rho_t^t \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_t} (\vec{e}_t \otimes \vec{e}_t) + \frac{\rho_t}{2} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ct}} \left( e^{\vec{t}^\times} \otimes \vec{e}_c + e^{\vec{c}^\times} \otimes \vec{e}_t \right) \quad (54)$$

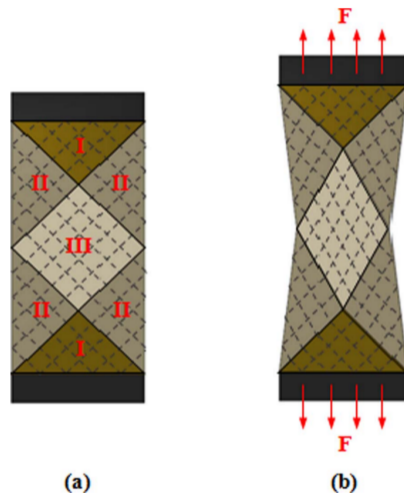
où  $\rho_t$  est la masse volumique déformée du tissage, et  $\rho_t^c$  et  $\rho_t^t$  sont les fractions de masses des chaînes et des trames dans la masse volumique du tissage ( $\rho_t = \rho_t^c + \rho_t^t$ ).

- en bleu, la contrainte due à l'élongation des chaînes
- en rouge, la contrainte due à l'élongation des trames
- en noir, la contrainte due au changement d'angle chaîne-trame

**Vecteur  $\vec{e}_c$** : vecteur unitaire dans la direction des chaînes déformées.

**Vecteur  $\vec{e}_t$** : vecteur unitaire dans la direction des trames déformées.

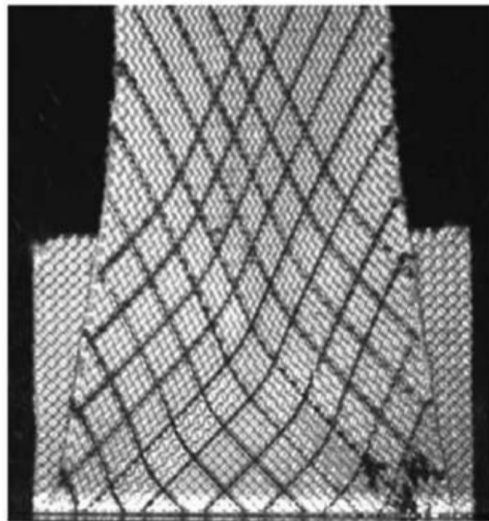
## Exemple de la Traction sur un tissage à 45 degrés des fils



(Hosseini et al., 2018)

Fig. 1. A plain woven sample (a) at the beginning of BET, (b) during BET.

## Exemple de la Traction sur un tissage à 45 degrés des fils



(King, Jearanaisilawong and Socrate, 2005)

## Exemple de la Traction sur un tissage à 45 degrés des fils

Simulation numérique par éléments finis (Dib, 2014); angle entre chaîne et trame (degrés):



# Exemple de la Traction sur un tissage à 45 degrés des fils

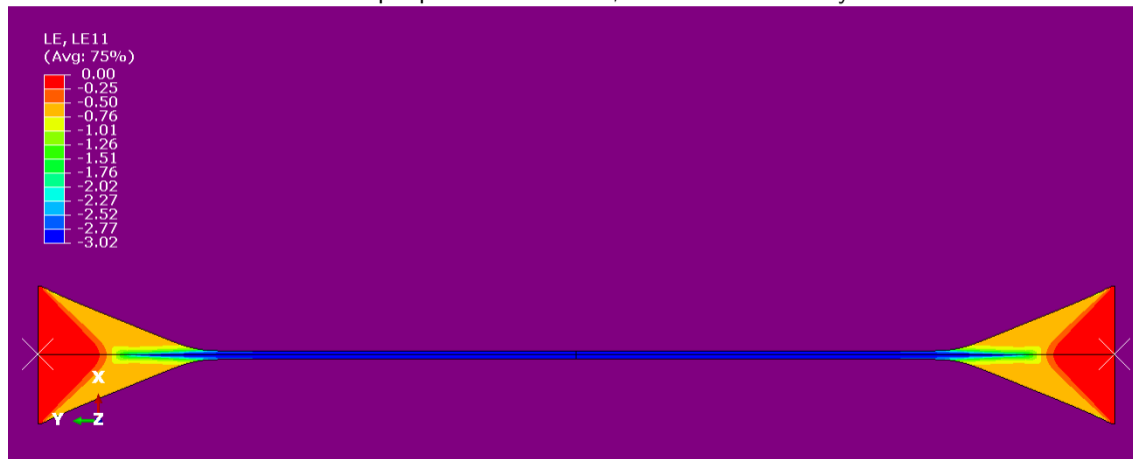
Simulation numérique par éléments finis; angle entre chaîne et trame (degrés):





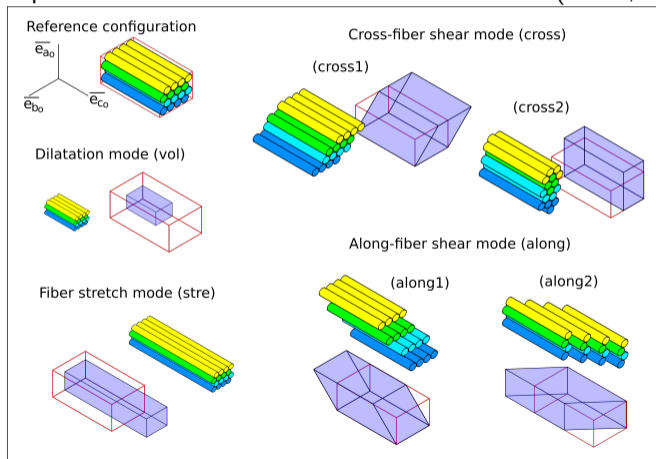
# Exemple de la Traction sur un tissage à 45 degrés des fils

Simulation numérique par éléments finis; déformation Hencky transverse:



# Invariants physiques pour les matériaux isotropes-transverses

Décomposition de la déformation en différents modes (Civier, 2023):



## Invariants physiques pour les matériaux isotropes-transverses

Criscione, Douglas and Hunter (2001) ont su capter ces différents modes de déformation au travers des invariants suivants:

$\beta_1 = \frac{\ln I_3}{2}$  capture le changement de volume (mode *vol*)

$\beta_2 = \frac{3}{4} \ln I_4 - \frac{1}{4} \ln I_3$  capture l'élongation dans la direction des fibres (mode *stre*)

$\beta_3 = \operatorname{argcosh} \left( \frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} \right)$  capture les cisaillements dans le plan transverse aux fibres (mode *cross*)

$\beta_4 = \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}$  capture les cisaillements dans la direction des fibres (mode *along*)

Chaque invariant cible un mode de déformation dont le comportement mécanique peut être identifié par le modélisateur.

Par exemple, pour des **fibres en contact sans matrice**:

$\beta_1$  comportement de compression hydrostatique (par exemple élastique)

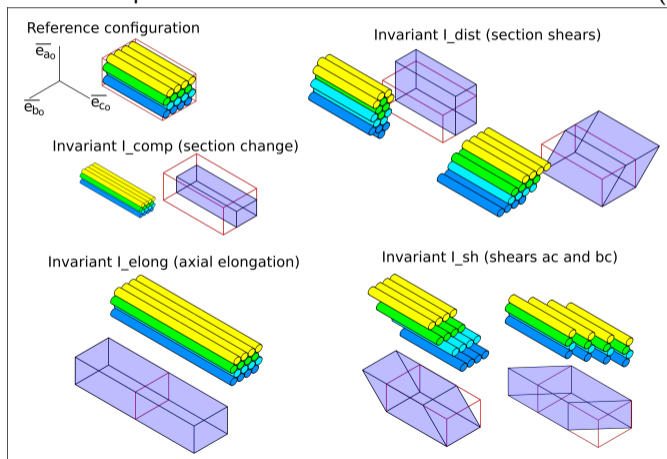
$\beta_2$  comportement des fibres en traction (par ex. visco-élasto-plastique)

$\beta_3$  glissement, friction et abrasion des fibres entre elles (par ex. elasto-plastique)

$\beta_4$  glissement, friction et abrasion des fibres entre elles dans un autre mode (par ex. elasto-plastique)

# Invariants physiques pour les matériaux isotropes-transverses

Variante de cette décomposition de la déformation en différents modes (Civier, 2023):



# Invariants physiques pour les matériaux isotropes-transverses

Charmetant, Vidal-Sallé and Boisse (2011) ont adapté les invariants de Criscione pour la variante de décomposition précédente:

$$I_{comp} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{3}$$

$$I_{elong} = \frac{\beta_1 + 2\beta_2}{3}$$

$$I_{dist} = \frac{\beta_3}{2}$$

$$I_{sh} = \beta_4$$

Par exemple, pour un **tissu mou du vivant** ou un **élastomère renforcé de fibres/fils** avec une seule direction de fibres:

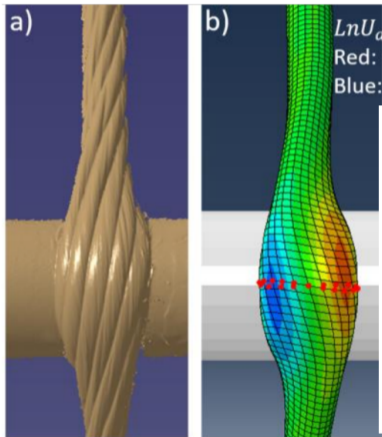
$I_{comp}$  comportement de compression biaxiale de la matrice seule dans le plan transverse aux fibres

$I_{elong}$  comportement en traction des fibres et de la matrice (en parallèle)

$I_{dist}$  cisaillement de la matrice seule (principalement)

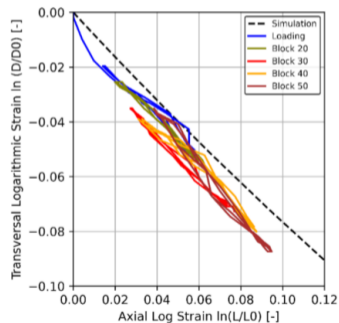
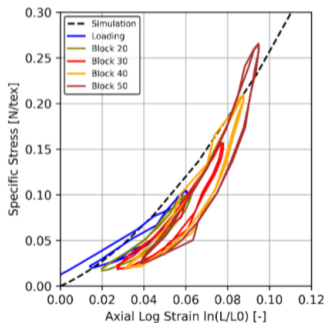
$I_{sh}$  cisaillement de la matrice seule (principalement)

## Exemple de simulation d'un toron



(Civier, 2023)

### Tension on a single strand: (Poisson's ratio = +1)



# Exemple de simulation d'un toron en contact avec un axe

Quelques vidéos

# Contents

- 1 Pourquoi les Grandes Déformations pour les fibreux
- 2 Lois hyperélastiques anisotropes (en grandes transformations)
- 3 tissus mous du vivant
- 4 tissages, tricots, filets
- 5 Fils, torons
- 6 Invariants de déformation basés sur la physique
- 7 Conclusion



# Conclusion

- Les matériaux à fibres nécessitent:
  - ▶ souvent, des lois anisotropes
  - ▶ parfois, le formalisme de Grandes Transformations
- Les lois hyperélastiques anisotropes classiques sont une solution.
- Le choix des invariants de déformation basés sur la physique:
  - ▶ facilite le travail du modélisateur,
  - ▶ permet de mieux modéliser le comportement.



# References I

- Boehler, J.P., Spencer, A.J.M. and Betten, J., 1987. *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM courses and lectures No. 292. Springer-Verlag Wien Gmbh.
- Charmetant, A., Vidal-Sallé, E. and Boisse, P., 2011. Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, 71, pp.1623–1631.
- Civier, L., 2023. *Caractérisation et modélisation de la fatigue et de la durabilité de ligne d'ancrages en polyamide pour les éoliennes offshore flottantes [characterization and modeling of fatigue and durability of polyamide mooring lines for floating offshore wind turbines]*. Ph.D. thesis. Written in English. Univ. Bretagne Loire, Engineering school ENSTA Bretagne, France.
- Criscione, J.C., Douglas, A.S. and Hunter, W.C., 2001. Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(4), pp.871–897.
- Dib, W., 2014. *Comportement mécaniques de tissus à voiles, en fibres synthétiques, sous sollicitations biaxiales et déformation finie (mechanical behavior of synthetic-fiber sailclothes under biaxial loading and finite strain)*. Ph.D. thesis. Univ. de Grenoble, France.

## References II

- Dib, W., Bles, G., Blaise, A. and Tourabi, A., 2018. Modelling of cyclic visco-elasto-plastic behaviour of coated woven fabrics under biaxial loading and finite strain. *International Journal of Solids and Structures*, 154, pp.147–167.
- Er-Rafik, A., 2026. *Caractérisation en traction biaxiale des matériaux tissés en cisaillement – application aux tissus enduits*. Ph.D. thesis. Université Grenoble Alpes, Laboratoires 3SR et IRDL, France.
- Holzappel, G.A., Gasser, T.C. and Ogden, R.W., 2000. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 61, pp.1–48.
- Hosseini, A., Kashani, M.H., Sassani, F., Milani, A. and Ko, F., 2018. Identifying the distinct shear wrinkling behavior of woven composite preforms under bias extension and picture frame tests. *Composite Structures*, 185, pp.764–773.
- King, M., Jearanaisilawong, P. and Socrate, S., 2005. A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp.3867–3896.

## References III

- Leech, C., 2002. The modelling of friction in polymer fibre ropes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp.621–643.
- Nolan, D., Gower, A., Destrade, M., Ogden, R. and McGarry, J., 2014. A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* [Online], 39, pp.48–60. Available from:  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2014.06.016>.